

O DESENVOLVIMENTO DE COMPETÊNCIAS A PARTIR DA MODELAGEM MATEMÁTICA: UM ESTUDO COM ALUNOS DA QUARTA SÉRIE DA ESCOLA PRIMÁRIA ALEMÃ



Vol. 12 Número 24 Jan./Abr. 2017

Ahead of Print

THE DEVELOPMENT OF COMPETENCES FROM MATHEMATICAL MODELING: A STUDY WITH STUDENTS OF THE FOURTH YEAR OF GERMAN PRIMARY SCHOOL

Marlí Schmitt Zanella¹

Lilian Akemi Kato²

RESUMO: Este trabalho teve por objetivo identificar as competências matemáticas mobilizadas por alunos de uma quarta série da Escola Primária da Alemanha. O estudo foi desenvolvido no âmbito da pesquisa qualitativa, com base no desenvolvimento de uma tarefa de Modelagem Matemática por três grupos de estudantes. As resoluções e negociações produzidas pelos participantes foram analisadas segundo os pressupostos teóricos do desenvolvimento de competências compreendidas no ciclo de modelagem de Blum. Dentre os resultados, destacamos que os sujeitos de pesquisa foram capazes de: (i) negociar e justificar as informações relevantes a situação problema proposta, o que possibilitou aos grupos entender a situação, simplificar e estruturar os dados e construir um modelo mental da situação; (ii) argumentar e definir ações para matematizar os dados considerados relevantes e traduzi-los para um modelo matemático e (iii) interpretar o modelo matemático obtido e validar tal resultado para a situação real, conduzindo-os a uma resposta apropriada às suas hipóteses.

PALAVRAS-CHAVE: Modelagem Matemática; Competências; Matematização; Validação.

ABSTRACT: The objective of this work was to identify the mobilized mathematical competences by students of a fourth

¹Doutora e Mestre em Educação para a Ciência e a Matemática pela Universidade Estadual de Maringá - UEM. Graduada em Matemática pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE. Docente do Departamento de Ciências da Universidade Estadual de Maringá. E-mail: marlischmitt@gmail.com.

²Doutora em Matemática Aplicada pela Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP. Mestre em Matemática pela Universidade Estadual de São Paulo - USP. Graduada em Matemática pela Universidade Estadual de Maringá - UEM. Docente do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá. E-mail: lilianakemikato@gmail.com.

year of a German Primary School. The study was developed within the scope of qualitative research, based on the development of a task of Mathematical Modeling by three groups of students. The resolutions and negotiations produced by the participants were analyzed according to the theoretical assumptions of the development of competencies comprehended in the modeling cycle of Blum. Among the results, we emphasize that the research subjects were capable of: (i) negotiating and justifying the relevant information to the proposed problem situation, which enabled the groups to understand the situation, simplify and structure the data and construct a mental model of the situation; (ii) arguing and defining actions to represent mathematically the data considered relevant and translate them into a mathematical model and (iii) interpreting the obtained mathematical model and validating such result for the real situation, leading them to an appropriate solution of mathematical problems to their hypotheses.

KEYWORDS: Mathematical Modeling; Competences; Mathematics; Validation.

Introdução

Tomando-se por base a discussão teórica proposta por Meyer, Caldeira e Malheiros (2013) a Modelagem Matemática no contexto da Educação Matemática é compreendida como um caminho para os processos de ensino e de aprendizagem da Matemática ou para o “fazer” Matemática na escola, tendo como princípios norteadores a observação da realidade, discussões e investigações de problemas por meio da Matemática. Por se tratar de uma investigação em sala de aula as situações problemas são oriundas da realidade dos alunos e de seus contextos sociais, da escola e de suas imediações.

No que concerne os diferentes níveis de ensino, pesquisadores como Maaß (2005) e Blum e Ferri (2009) sugerem que a Modelagem Matemática seja inserida desde o início da escolarização dos alunos, pois é uma possibilidade para modificar algumas crenças destes em relação à Matemática, como por exemplo, a existência de uma única resposta para um problema. Segundo Barbosa (2003) essa inserção também promove uma postura crítica e consciente dos alunos frente à presença da Matemática na sociedade.

Neste sentido, objetivamos neste trabalho identificar as competências matemáticas mobilizadas por alunos de uma quarta série da Escola Primária da Alemanha durante a resolução de uma tarefa de Modelagem Matemática, segundo os pressupostos de Greefrath et al (2013).

Adotamos a perspectiva de Modelagem Matemática de Blum (2006), que a compreende como “Tarefa” que requer traduções substanciais entre a realidade e a Matemática, por meio do desenvolvimento de modelos matemáticos. Este processo cíclico e iterativo envolve um problema inicial, uma simplificação de dados, matematização, interpretação e validação do modelo obtido para o problema inicial.

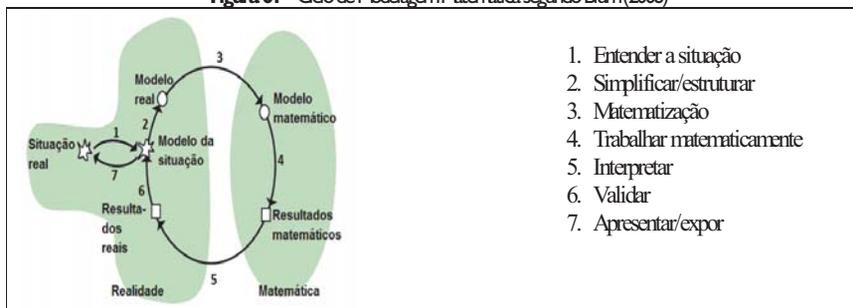
As competências requeridas a partir do desenvolvimento de uma tarefa de Modelagem Matemática são compreendidas como a “capacidade de identificar questões relevantes, as variáveis, as relações e as hipóteses de uma determinada situação real, para traduzi-las matematicamente, interpretando e validando a solução do problema matemático em relação à situação inicial dada” (NISS; BLUM; GALBRAITH, 2007, p. 12).

Destacamos que as discussões advindas desta investigação poderão subsidiar professores e pesquisadores da Educação Matemática quanto às possibilidades e a inserção da Modelagem Matemática desde os anos iniciais de escolarização.

A perspectiva teórica sobre modelagem matemática

Adotamos nesta pesquisa a perspectiva teórica sobre Modelagem Matemática advinda de Blum (2006). Para o autor o termo “Modelagem Matemática” significa resolver problemas advindos do mundo real com o auxílio de modelos matemáticos. Esses problemas possuem uma situação inicial (problemática) como ponto de partida, em que são utilizados procedimentos e diversificadas estratégias de ação para desenvolver um modelo real, a partir de dados reais e simplificações. A partir das informações consideradas pertinentes à situação e por meio do processo de matematização, se desenvolve um modelo matemático. Para que isso ocorra, o aluno deve realizar uma investigação para, na sequência, utilizar conceitos matemáticos e trabalhar matematicamente para desenvolver resultados matemáticos. A Figura 01 representa o ciclo de desenvolvimento de uma tarefa de Modelagem Matemática de acordo com Blum (2006).

Figura 01 – Ciclo de Modelagem Matemática segundo Blum (2006)



Fonte: Blum (2006, p.9, tradução dos autores).

No que diz respeito ao termo “tarefa” destacamos que o contexto da sala de aula de Matemática e as formas pelas quais as tarefas têm sido usadas pelos professores permitem identificá-las como um subconjunto de todas as atividades desenvolvidas, tanto pelo professor quanto pelos alunos, a qual é destinada a promover uma ideia matemática (STEIN; SMITH, 2009).

De acordo com Watson et al. (2013, p.12) “uma tarefa é qualquer coisa que o professor usa para ‘tornar público’ a matemática” ou “qualquer coisa que os alunos decidem fazer por si mesmos em uma situação particular”. Neste caso, uma tarefa compreende desde a construção de representações de objetos matemáticos, a exemplificação de definições, a resolução de problemas simples ou complexos, a tomada de decisão entre duas ou mais possibilidades, a realização de uma investigação, o desenvolvimento de projetos e também a Modelagem Matemática.

Embora Blum (2006) defina o desenvolvimento de uma Tarefa de Modelagem Matemática a partir de um ciclo, como explicitado na Figura 01, destacamos que ele não é sequencial, pois a partir de uma interpretação do resultado matemático o estudante pode retornar ao problema inicial e reorganizar ações, como por exemplo, desde a matematização, para gerar um resultado matemático diferente daquele admitido anteriormente, que reinterpretado e validado retorna ao problema inicial com resultados reais.

No contexto de uma discussão didática, a obtenção de um modelo está associada ao desenvolvimento e resolução de tarefas de Modelagem Matemática, isto é, a resolução de uma situação problema da vida real com a ajuda de modelos matemáticos (FERRI, 2006). As

tarefas de Modelagem Matemática são descritas em termos de uma situação inicial – referente à problemática em estudo, e uma situação final – referente ao modelo matemático, que representa uma resolução ao problema e vários procedimentos que permitem a passagem entre a situação inicial e final (modelo).

Uma das vantagens de se desenvolver tarefas de Modelagem Matemática na sala de aula é a possibilidade dos alunos descreverem as estratégias de resolução que podem revelar, explicitamente, como os alunos pensam em uma dada situação (BLUM, FERRI, 2009). De acordo com Blum (2006) uma tarefa de Modelagem Matemática desenvolvida pelos alunos pode ser interpretada pelo professor, em termos de competências que os alunos desenvolvem durante a resolução.

Neste sentido, de acordo com Blum et al. (2002), a Modelagem Matemática se apresenta como um instrumento para mobilizar e ampliar conhecimentos matemáticos, além de relacionar a Matemática com situações da realidade. Com isto, entendemos que durante o desenvolvimento de tarefas de Modelagem Matemática, podemos identificar ações realizadas pelos estudantes, explícita ou implicitamente, envolvendo raciocínios e diferentes estratégias que os tornam matematicamente competentes a resolverem o problema.

O desenvolvimento de competências a partir da modelagem matemática

As competências desenvolvidas para modelar situações advindas da realidade por meio da Matemática possibilitam ao aluno a tomada de decisão e seu posicionamento de forma ativa na construção e/ou elaboração do próprio saber. Esta ação requer organização e reflexão do estudante durante todo o processo de resolução da situação, o que possibilita o desenvolvimento de habilidades na execução de estratégias de resolução em situações mais complexas e menos familiares ao contexto do aluno.

O objetivo é auxiliar os estudantes a desenvolverem competências para reconhecer relações entre situações do mundo real e a Matemática. Neste sentido, a competência desenvolvida a partir da Modelagem Matemática é definida por Niss, Blum e Galbraith (2007) como:

[...] a capacidade de identificar questões relevantes, variáveis, relações ou suposições em uma dada situação do mundo real, para traduzi-los para a matemática e de, interpretar e validar a solução do problema matemático, obtendo como resultado uma relação à situação inicial dada, bem como a capacidade de analisar ou comparar modelos elaborados na resolução de situações dadas, verificando as propriedades e o propósito de um determinado modelo (NISS; BLUM; GALBRAITH, 2007, p.12, tradução dos autores).

No Quadro 01 elencamos as competências para o desenvolvimento de tarefas de Modelagem Matemática de acordo com Greefrath et al (2013) e algumas ações requeridas do estudante para desenvolver tais competências.

Competências segundo Greefrath et al (2013, p.19).	Aspectos considerados para o desenvolvimento da competência
C1: Competências para entender o problema real.	O estudante apenas entende a situação real dada, mas não é capaz de estruturar e simplificar a situação.
C2: Competências para criar um modelo baseado na realidade, simplificar e estruturar dados reais.	O estudante entende a situação real e é capaz de estruturar e simplificar dados pertinentes à situação para levantar algumas hipóteses de trabalho.
C3: Competências para estabelecer um modelo matemático a partir do modelo real.	Após investigar os dados reais da situação, o estudante encontra um modelo real por meio de estruturação e simplificação, para matematizar quantidades relevantes e identificar relações entre os dados do problema e algumas ideias matemáticas, mas não sabe como transferir isso para o problema matemático.
C4: Competências para resolver questões matemáticas dentro do modelo matemático.	O estudante é capaz de encontrar não só um modelo real, mas também em traduzi-lo adequadamente ao problema matemático.
C5: Competências para interpretar resultados matemáticos em uma situação real.	O estudante é capaz de tomar um problema matemático da situação real, trabalhar com este problema matemático no mundo matemático, e obtém resultados matemáticos.
C6: Competências para validar a solução.	O estudante é capaz de experimentar o processo de modelagem matemática e validar a solução de um problema matemático em relação a situação dada.

Quadro 01 – Desenvolvimento de competências a partir do desenvolvimento de tarefas de Modelagem Matemática.
Fonte: Adaptado de Greefrath et al (2013, p.19).

Destacamos que as competências descritas por Greefrath et al (2013) representam uma possibilidade de análise para a resolução de tarefas de Modelagem Matemática, no que diz respeito ao reconhecimento das ações requeridas dos alunos durante o “processo de fazer” Modelagem Matemática.

Percurso metodológico da pesquisa

Os procedimentos de descrição do processo de desenvolvimento deste estudo seguem pressupostos da pesquisa qualitativa, em que buscamos compreensões interpretativas para o objetivo proposto (BOGDAN; BIKLEN, 1994). Neste texto, utilizamos os resultados obtidos a partir do desenvolvimento de uma tarefa de Modelagem Matemática, intitulada “Congestionamento em Hessen”, por uma turma composta por 15 alunos que cursavam, no segundo semestre letivo de 2015, a quarta série (correspondente ao quinto ano do Ensino Fundamental no Brasil) de uma Escola Municipal da Rede Pública do Estado de Hessen, Alemanha. Tais resultados inserem-se numa pesquisa mais ampla acerca da inserção da Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental e do desenvolvimento de competências a partir da Modelagem Matemática (ZANELLA, 2016).

A resolução da tarefa teve duração de 90 minutos. Os participantes foram organizados em três (03) grupos, denominados Grupo A, B e C, e os seus participantes nomeados com a inicial do grupo e um numeral sequencial. Os dados foram recolhidos por meio de registros escritos e orais, obtidos por meio de gravação de áudio.

O desenvolvimento da tarefa de modelagem matemática “congestionamento em hessen” pelos participantes

Esta tarefa teve por objetivo identificar, a partir de uma situação de congestionamento de carros, a quantidade de pessoas que estariam paradas em seus veículos nesse congestionamento. Adaptada de Peter-Koop (2003), a tarefa pode ser modificada de acordo com informações da localidade da comunidade escolar.

No momento em que a tarefa foi realizada, em maio de 2015, os jornais da Alemanha noticiavam que a *Deutschebahn*, empresa de transporte ferroviário da Alemanha, estava em sua 8ª greve geral no período dos últimos nove (09) meses. Telejornais e jornais impressos de todo país noticiavam a greve dos maquinistas e as interferências desta paralisação para a população. Neste sentido, as informações veiculadas em jornais da cidade de Kassel, localizada no Estado de Hessen, foram utilizadas para contextualizar a problemática da tarefa, mantendo-se o objetivo. O diálogo que segue corresponde à apresentação da tarefa aos estudantes:

Pesquisadora: Nesta semana os jornais e telejornais estão noticiando um problema na Alemanha. Vocês sabem o que está acontecendo?

A3: Sim. Todos os jornais falaram. É a greve dos maquinistas.

A4: É a greve mais longa dos trens. Nós lemos isso esta semana aqui na escola, e não há prazo para terminar.

Pesquisadora: E vocês sabem por que a greve está ocorrendo?

A3: É sobre o aumento de salário.

Pesquisadora: E essa greve interfere na vida dos alemães?

C5: Sim. Todos usam os trens.

A2: É muita gente mesmo.

Pesquisadora: E o que está acontecendo na vida dessas pessoas?

A3: Fica mais difícil o transporte. Pois as pessoas usam o trem para viajar e até

para trabalhar.

Pesquisadora: Para trabalhar?

C3: Sim. Muitas pessoas trabalham em Kassel, mas moram em Lohfelden ou Fulda.

Pesquisadora: E como essas pessoas podem se deslocar para o trabalho? Com a quantidade de trens reduzida?

B2: Podem ir de trem, mas é pouco. Ou ... de ônibus.

B1: Também podem ir de carro, pois são poucos trens. E são muitas pessoas trabalhando em outras cidades.

A3: Vai ter muita gente indo de carro, são muito mais carros na pista.

Pesquisadora: Sim. Tem mais carros na pista e com isso, haverá congestionamentos. Essa foi a notícia dada pelo jornal HR-online, no dia de ontem. Havia um congestionamento na Rodovia A7, de Kassel para Fulda. Eram 3 km de congestionamento.

C3: Ah, mas foi pouco. Já aconteceram filas com mais de 10 km.

Pesquisadora: Certo. E o desafio que eu trouxe para vocês refere-se a este congestionamento. A questão que eu trago é a seguinte: Quantas pessoas se encontram em 3 km de congestionamento?

Após este diálogo foi entregue a cada um dos grupos uma folha contendo o enunciado do problema, representado no Quadro 02. Ressaltamos que nesta sala de aula estavam disponíveis fitas métricas e carrinhos de brinquedo, mas não foram solicitados pelos estudantes.

Congestionamento em Hessen



Em 07.05.2015, o jornal HR-online descreveu:

A situação do trânsito em Hessen
Rodovia A7 - Kassel para Fulda
Entre Guxhagen e Melsungen - 3 km de tráfego lento.

http://www.hr-online.de/website/rubriken/nachrichten/stau_info2336.jsp?rubrik=2336

Quantas pessoas se encontram em 3 km deste congestionamento?

Quadro 02 – Tarefa de Modelagem Matemática “Congestionamento em Hessen”.

Fonte: Adaptado de Peter-Koop (2003).

Nas resoluções desenvolvidas por cada um dos grupos as relações matemáticas abordadas foram: (i) Discussão acerca do comprimento de um carro; (ii) Determinação da quantidade de carros em cada fila do congestionamento; (iii) Determinação da quantidade de pessoas por carro.

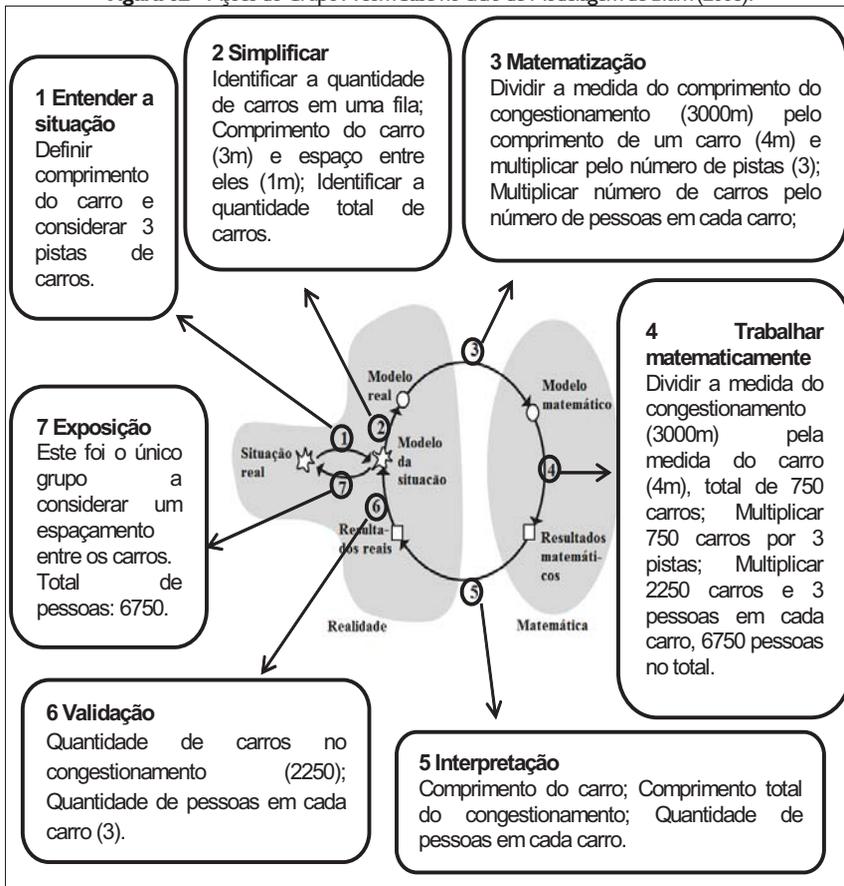
Na sequência apresentamos uma descrição das resoluções da tarefa “Congestionamento em Hessen” realizadas por três grupos, e uma análise interpretativa para identificar, a partir das ações destes alunos, quais competências requeridas para resolver uma tarefa de Modelagem Matemática foram mobilizadas pelos participantes.

Desenvolvimento da tarefa de modelagem matemática “congestionamento em hessen” pelo grupo a

Na Figura 02 identificamos as ações desenvolvidas pelo grupo A para a resolução da tarefa “Congestionamento em Hessen” a partir do ciclo de Modelagem Matemática de Blum

(2006).

Figura 02 – Ações do Grupo A com base no ciclo de Modelagem de Blum (2006).



Fonte: Adaptado de Blum (2006) e protocolos produzidos pelo Grupo A para a tarefa de Modelagem Matemática “Congestionamento em Hessen”.

Os dados considerados relevantes pelo grupo foram negociados pelos participantes e liderados pelo estudante A2. Entre as negociações, foi explicitada a necessidade de se considerar uma distância entre os carros, como mostra o diálogo a seguir:

A2: Qual é o comprimento de um carro?

A4: Depende. Vamos usar um carro pequeno.

A5: Sim. A maioria é pequeno.

A2: Eu acho que um carro comum tem 3 metros de comprimento.

A4: Concordo. Os carros pequenos são os mais comuns.

A2: Então vamos considerar um carro de 3 metros de comprimento.

A3: E nós vamos considerar o espaço entre os carros?

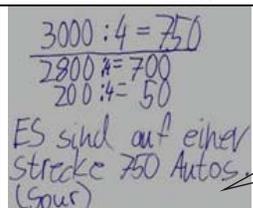
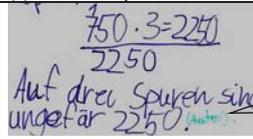
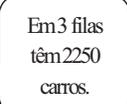
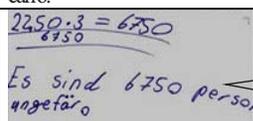
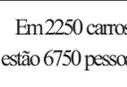
A2: Como assim?

A4: Os carros estão na fila, mas não estão grudados uns nos outros.

- A3: Isso. Tem um espaço entre os carros.
 A2: É verdade. E vamos considerar um espaço de 1 metro?
 A5: Sim. 1 metro está bom.
 A4: Se considerarmos esse espaço entre os carros podemos contar 2500 carros no congestionamento!
 A2: 2500 carros? Como?
 A4: O congestionamento tem 3000 m e são 3 pistas. Então, isso dá 9000 m. Mas, o carro e o espaço entre eles são 4 m. Então, aproximadamente, são 2500 carros!
 A5: Como? Não entendi!
 A4: Se considerar 10 000 m, e são 4 m cada carro [...] isso dá, 2500 carros.
 A2: Agora entendi! É uma aproximação. Vamos marcar esse valor aqui. Depois calculamos.
 A4: Assim, nós já sabemos que vai ser próximo de 2500 carros, é uma boa aproximação.

Este excerto refere-se à primeira discussão dos alunos para negociar os dados necessários para a resolução da tarefa, dos quais inferimos que se identifica a mobilização de competências para entender o problema real, estruturar dados reais e construir relações matemáticas para formular um modelo matemático que representa a situação, conforme as competências C1 e C2 de Greefrath et al (2013).

Na sequência, o Grupo organizou os dados de acordo com conhecimentos matemáticos necessários para resolver a tarefa, bem como desenvolveram relações entre os dados e a matemática, o que representa, de acordo com Greefrath et al (2013), as competências C3 e C4. No Quadro 03 são descritos os procedimentos matemáticos realizados pelo grupo.

(a) Cálculo da quantidade de carros (4 metros corresponde ao comprimento do carro e o espaço entre os carros) em uma fila de 3000 metros.		
		<p>O grupo utilizou a operação de divisão para determinar a quantidade de carros em uma fila de 3000 metros. O divisor 4, corresponde ao espaço ocupado pelo carro (3 metros) e a distância entre eles (1 metro), totalizando 4 m. A representação da operação de divisão utilizada pelo grupo é uma das representações apresentadas nos livros didáticos utilizados pela escola.</p>
(b) Cálculo da quantidade de carros em 3 filas de 3000 metros cada uma.		
		<p>O grupo utilizou a operação de multiplicação para determinar a quantidade de carros em três filas de 3000 metros. Multiplicação entre 750 carros em uma fila e 3 filas de carros, obtendo 2250 carros.</p>
(c) Cálculo da quantidade de pessoas neste congestionamento. O grupo considerou a quantidade de 3 pessoas por carro.		
		<p>Multiplicação entre a quantidade de carros (2250) e a quantidade de pessoas em cada carro (3), obtendo 6750 pessoas no congestionamento, aproximadamente.</p>

Quadro 03 – Matemização desenvolvida pelo Grupo A.

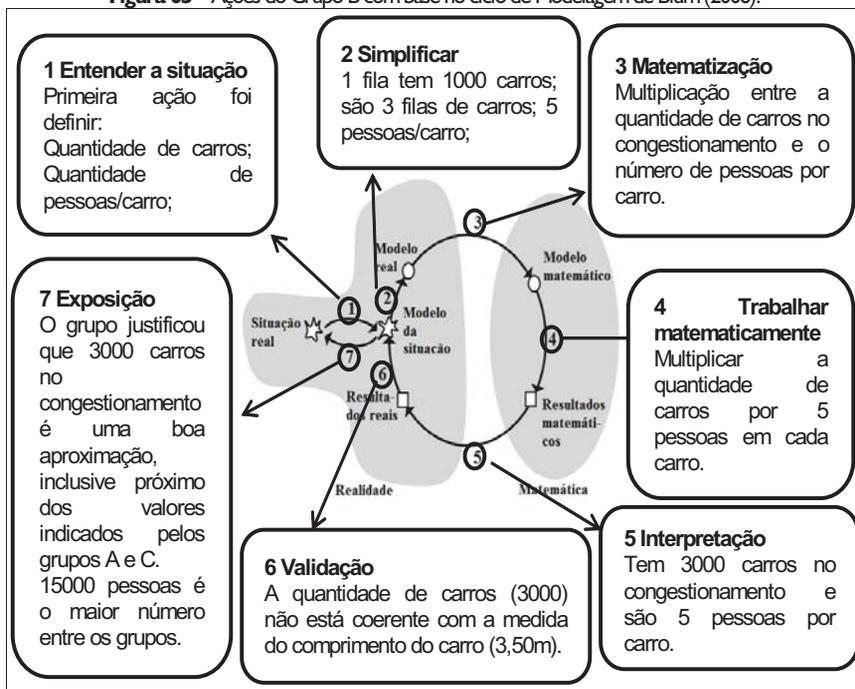
Fonte: Protocolo produzido pelo Grupo A para a tarefa de Modelagem Matemática “Congestionamento em Hessen”.

Destacamos que o modelo desenvolvido pelo Grupo A para esta tarefa contemplou dados mais próximos da realidade do que os demais grupos, pois consideraram uma distância (espaço) entre os automóveis parados no congestionamento. O processo de validação ocorreu verbalmente, mas não foi registrado pelo grupo, embora os participantes negociassem as ações realizadas durante todo processo, o que os possibilitou comunicar-se e verificar os passos realizados para apresentar uma resposta à problemática inicial.

Desenvolvimento da tarefa de modelagem matemática “congestionamento em hessen” pelo grupo b

Na Figura 03 estão indicadas as ações do Grupo B para a resolução da tarefa de acordo com o ciclo de Modelagem de Blum (2006).

Figura 03 – Ações do Grupo B com base no ciclo de Modelagem de Blum (2006).



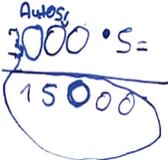
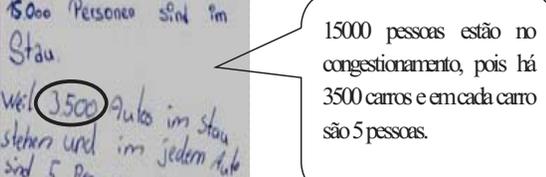
Fonte: Adaptado de Blum (2006) e protocolos produzidos pelo Grupo B para a tarefa de Modelagem Matemática “Congestionamento em Hessen”.

O Grupo B iniciou uma discussão sobre a quantidade de carros que poderiam estar no congestionamento de 3 quilômetros, e para isso, descreveram que “por hipótese há 3000 carros em 3 filas de 3 quilômetros de congestionamento”. A palavra hipótese é destacada pelos estudantes, pois quando foram questionados pela pesquisadora explicaram que referia-se a “uma estimativa” feita pelo grupo. A segunda informação negociada pelo grupo foi a quantidade de pessoas em cada carro, ilustrado no diálogo a seguir:

B2: Quantas pessoas têm no carro?

- B5: O motorista.
 B3: É pouco. Eu acho que têm 3 pessoas.
 B2: Eu também. Três pessoas é um bom número.
 B1: Mas, o carro pode ter mais lugares. Eu acho que tem que ter 5 pessoas.
 B2: Cinco pessoas é muito!
 B1: Não. Pois se não tem trem, como elas vão trabalhar? Elas vão todas juntas. Tem que ir de carro. E elas vão juntas para o trabalho.
 B3: Eu acho que 5 é muito.
 B1: Mas tem que usar todos os lugares do carro!
 B4: É. Se a gente usar 5, vai ocupar todos lugares.
 B2: Então vamos colocar 5 pessoas no carro? (todos respondem positivamente).

Com base nessas ações podemos inferir que o grupo mobilizou as competências C1 e C2 para entender a situação real e estruturar dados para estabelecer um modelo matemático da situação (GREEFRATH et al, 2013). Na sequência, o estudante B3 registrou esta informação e apresentou o cálculo de 3000 carros multiplicado por 5 pessoas, totalizando 15000 pessoas no congestionamento, o que representa a mobilização das competências C3 e C4. No Quadro 04 apresentamos o desenvolvimento de competências para matematizar a situação.

(a) Multiplicação entre a quantidade de carros (3000) e a quantidade de pessoas/carro.	(b) Resposta para a tarefa
	

Quadro 04 – Matematização desenvolvida pelo Grupo B.

Fonte: Protocolo produzido pelo Grupo B para a tarefa de Modelagem Matemática “Congestionamento em Hesse”.

No item (b) do Quadro 04 o Grupo B descreveu que no congestionamento estariam 15000 pessoas, mas justificou que eram 3500 carros no congestionamento, com 5 pessoas em cada carro. Entretanto, no item (a) a quantidade de carros registrada foi diferente, pois registraram 3000 carros. No excerto do diálogo a seguir é possível compreender a negociação produzida pelo Grupo B:

- B3: Vamos colocar 1000 carros em cada fila.
 B5: Sim. São 3 filas, isso dá 3000 carros.
 B2: Mas, por que está escrito 3500 carros?
 B3: Por que a gente pensou que caberiam 3500 carros. Mas mudamos. Isso é muito. (neste momento B3 corrige, na folha, o cálculo do Quadro 13 item (a), substituindo 3500 por 3000).

Durante o processo de validação este grupo foi questionado sobre a quantidade de carros no congestionamento, pois não haviam mencionado como determinaram este número.

- A4: Como vocês encontraram esse número, 3000 carros?

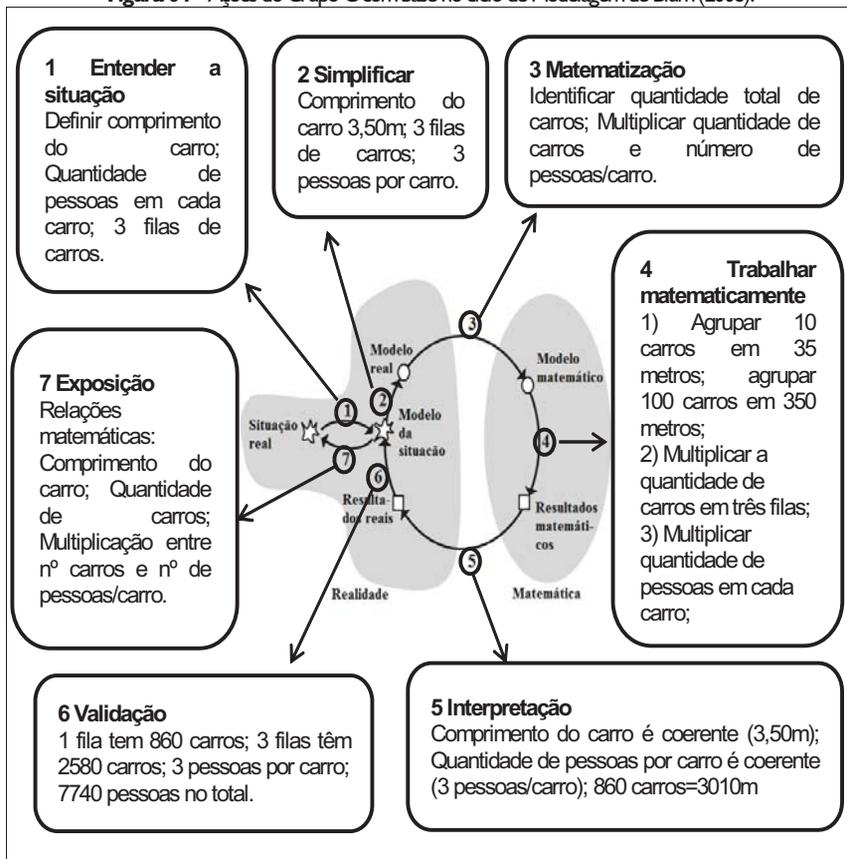
- B2: Nós imaginamos que tinham 1 000 carros em cada fila.
A4: Mas qual comprimento do carro que vocês usaram?
B2: A gente determinou que o carro tinha três metros e meio.
A4: Mas não pode dar 1 000 carros em cada fila.
B1: Pode sim. Cada fila tem 1 000 carros!
A4: Não, pois para 3 000 metros (referindo-se a 3 km de congestionamento) só pode ter 1 000 carros de 3 metros cada. Como o teu carro tem 3,5 metros, tem que ter menos carros.
B2: Como assim?
A4: 3 metros (comprimento do carro) vezes 1 000 carros dá 3 000 metros. Se você disse que o teu carro mede 3,5 metros então a tua fila tem 3 500 metros. É maior do que o congestionamento!
B2: Ah, entendi. Está errado.
B5: Mas o resto não está.
B2: É. Depois a gente calculou quantas pessoas tinha no total. Para isso, a gente multiplicou por 5, pois tem 5 pessoas em cada carro.
B3: Deu 3 000 carros vezes 5 pessoas. No total, 15 000 pessoas estão no congestionamento.
A5: Mas todos os carros estavam lotados?
B1: Sim. Por que não tinha trem. Eles tinham que ir trabalhar. Então eles foram juntos.
A2: Mas poderia ter algum carro com 1 pessoa apenas.
B4: Mas a gente achou melhor 5 pessoas, teriam mais pessoas na fila.
B2: É. Mas a gente também pensou que poderia ter 3 pessoas. Mas 5 seria melhor, pois ocuparia todos os lugares do carro.
B1: E com 5 pessoas, mais pessoas iriam trabalhar. Por isso nós calculamos 15 000 pessoas.

Após essa discussão o Grupo B aceitou que, em virtude do comprimento do carro definido como 3,5 metros, era equivocado afirmar que em cada fila havia 1 000 carros, e sendo 3 filas de congestionamento, teria um total de 3 000 carros parados. Entretanto, com relação à quantidade de pessoas em cada carro, os estudantes do grupo defenderam que em cada carro havia 5 pessoas, de modo que o maior número de pessoas pudesse ir ao trabalho de carro. Com o excerto das negociações do Grupo B inferimos que as competências C5 e C6 foram mobilizadas. De acordo com Greefrath et al (2013) as ações do Grupo B possibilitaram investigar os dados da situação e encontrar um modelo real por meio da estruturação e simplificação dos dados. Entretanto, o Grupo B não soube como transferir isso para o problema matemático para dar uma resposta pertinente à problemática inicial. Durante o processo de validação, este grupo foi questionado pelos demais alunos sobre a relação estabelecida para obter a quantidade de carros em uma fila (1 000 carros) e a medida do comprimento do carro (3,5m), que não estavam relacionados de forma coerente. Além disso, os demais grupos questionaram a quantidade de pessoas dentro de um carro, pois poderia haver veículos com apenas uma ou duas pessoas.

Desenvolvimento da tarefa de modelagem matemática “congestionamento em hessen” pelo grupo c

Na Figura 04 estão indicadas as ações do Grupo C para a resolução da tarefa de Modelagem Matemática “Congestionamento em Hessen” de acordo com o ciclo de Modelagem Matemática de Blum (2006).

Figura 04 – Ações do Grupo C com base no ciclo de Modelagem de Blum (2006).

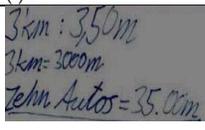
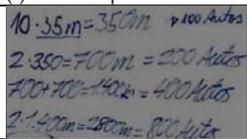
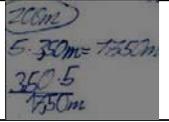
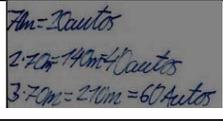
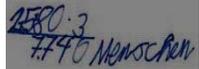


Fonte: Adaptado de Blum (2006) e protocolos produzidos pelo Grupo C para a tarefa de Modelagem Matemática “Congestionamento em Hessen”.

As unidades de sentido (dados e informações) consideradas relevantes pelo Grupo C foram: (i) Comprimento do congestionamento (9000m): O estudante C5 explicou que a rodovia possui 3 pistas e todas têm carros, logo, são 3 pistas de 3 km de congestionamento; (ii) Comprimento de um carro (3,50 m): De acordo com os alunos C5 e C3, no geral os carros são pequenos, referindo-se aos carros modelo *hatch*. O estudante C5 indicou ao grupo que “3,50 m é o mesmo que o comprimento da metade da sala”; (iii) Quantidade de pessoas em cada carro (3 pessoas): A justificativa ocorreu pela possibilidade de alguns carros terem apenas 1, 2 ou 3 pessoas, e a minoria dos carros terem 4 ou 5 pessoas. Desta forma, C5 afirmou que “considerar 3 pessoas em cada carro seria uma boa média”.

Essas ações indicam a mobilização das competências C1 e C2, ou seja, competências para entender o problema real e criar um modelo baseado na realidade a partir da estruturação de dados (GREEFRATH et al, 2013). No Quadro 05 são apresentadas as demais ações do grupo C para o desenvolvimento desta tarefa, no qual é possível identificarmos a mobilização das competências C3 e C4, em que foram capazes de

matematizar e trabalhar com conceitos matemáticos para estabelecer um modelo matemático a partir de dados reais.

(a) Dados considerados relevantes		(b) Cálculo da quantidade de carros em 2800 m.	
	3 km de fila; Carro: 3,50m; 3 km = 3000 m 10 carros = 35,00m		350m há 100 carros 700m há 200 carros 1400m há 400 carros 2800m há 800 carros.
(c) Cálculo da quantidade de carros em 200m de congestionamento			
	Faltam 200m para completar 3000m de fila. Em 17,50m há 5 carros.		70m há 20 carros 140m há 40 carros 210m há 60 carros
(d) Cálculo da quantidade de carros em 3 km de fila e, da quantidade de pessoas nos carros.			
	860 carros multiplicado por 3 filas, totalizando 2580 carros.		2580 carros multiplicado por 3, totalizando 7740 pessoas.

Quadro 05 – Matematização do Grupo C.

Fonte: Protocolo produzido pelo Grupo C para a tarefa de Modelagem Matemática “Congestionamento em Hessen”.

Destaca-se que, no item (c) do Quadro 05, os estudantes registraram “ $3 \cdot 70m = 210m$, o que corresponde a 60 carros”. O valor indicado para 60 carros (210 m) é superior aos 200 m restantes para obter 3000 m. O estudante C5 relatou aos colegas que no cálculo de 860 carros, há 10 m a mais do que 3000 m, ou seja, calcularam um congestionamento com 3010 m, e isso acarretaria encontrar carros a mais na fila. O estudante C2 concordou, mas relatou que “não há mais tempo para a atividade” e o estudante C3 concluiu que “os 10 m representam 3 carros. Isso não vai mudar o resultado”. Desta forma, o estudante C5 concluiu a tarefa com o cálculo de 3010 m de congestionamento. Esse trecho, obtido por meio de registro de áudio, não foi mencionado pelo grupo durante a validação e exposição aos demais participantes da sala. Este excerto indica a mobilização das competências C5 e C6 de acordo com Greefrath et al (2013).

A partir das negociações do grupo C para a resolução da tarefa de Modelagem “Congestionamento em Hessen” é possível identificar o desenvolvimento de todas as competências matemáticas, pois foram capazes de experimentar o processo de Modelagem Matemática e validar a solução do problema matemático em relação à situação dada.

Considerações

Neste artigo apresentamos o desenvolvimento de competências matemáticas mobilizadas por estudantes alemães durante a realização de uma tarefa de Modelagem Matemática, de acordo com os pressupostos teóricos de Greefrath et al (2013).

Os colaboradores desta pesquisa foram capazes de: (i) Negociar e justificar as informações relevantes do problema, o que possibilitou aos grupos entender a situação, simplificar e estruturar os dados e construir um modelo mental da situação. Para isto, foram considerados pelos grupos: (i) a ideia de estimativa; (ii) a ideia de média, ao considerarem que a média da quantidade de pessoas em um carro é de três pessoas, pois haveriam carros com uma pessoa e outros com até cinco pessoas.

No que concerne às competências mobilizadas para argumentar e definir ações para matematizar os dados pertinentes e traduzi-los para um modelo matemático,

destacamos a mobilização de ideias compreendidas no campo conceitual multiplicativo. Neste caso, os alunos alemães foram capazes de negociar, entre seus pares, o melhor caminho para resolver o problema. As tarefas de Modelagem Matemática diferenciam-se de uma atividade de resolução de problemas, pois informações inerentes ao problema não estão explícitos no enunciado. É tarefa dos alunos negociarem os dados reais que possibilitam a resolução da tarefa e relacionar estes dados aos conceitos matemáticos requeridos para resolvê-la (BLUM, 2006). Ressaltamos que os processos pelos quais os grupos desenvolveram seus modelos foram diferentes, pois o Grupo A desenvolveu seu modelo a partir da divisão entre o comprimento total pela distância ocupada por um carro, enquanto que os Grupos B e C desenvolveram seus modelos a partir do comprimento de 1 carro, multiplicado iteradas vezes até se obter o comprimento total do congestionamento.

Reforçamos também o envolvimento e a familiaridade dos alunos alemães no desenvolvimento da tarefa, especialmente, ao interpretar o modelo matemático obtido e validar tal resultado para a situação real, conduzindo-os a uma resposta condizente com suas hipóteses. Neste sentido, o modelo desenvolvido pelos grupos não foi, necessariamente, algo novo, mas oportunizou aos alunos mobilizar conhecimentos matemáticos familiares à sua experiência escolar resolver a problemática e, com isto, refletir sobre as respostas formuladas. As discussões promovidas pelos grupos, durante a validação de cada um dos modelos desenvolvidos, explicitou a preocupação quanto aos resultados obtidos. Por mais que os Grupos A e C tivessem apresentado resultados diferentes e por processos diferentes (Grupo A 6750 pessoas e Grupo B 7740 pessoas), ainda assim, eram resultados próximos. Já o Grupo B apresentou como resultado a quantidade de 15000 pessoas paradas no congestionamento. De acordo com estes estudantes, o valor calculado pelo Grupo B era, aproximadamente, o dobro dos demais grupos, proveniente dos dados considerados pelo Grupo B, que considerou 5 pessoas em cada carro.

Este processo, de desenvolvimento de modelos, pode incentivar os alunos a resolver, descrever, simplificar, revisar e refinar suas ideias (validar), bem como, utilizar uma variedade de meios de representações para explicar as estratégias utilizadas para resolver uma tarefa de Modelagem Matemática (GREEFRATH et al, 2013).

Neste sentido, as competências mobilizadas a partir da Modelagem Matemática representam a capacidade para identificar questões relevantes da situação problema, as variáveis pertinentes à resolução, as relações entre os dados considerados na situação e os conceitos matemáticos, bem como, as conjecturas formuladas pelos alunos sobre uma dada situação do mundo real, de modo a traduzir tais informações reais para a Matemática e, além disso, interpretar e validar a resolução da situação real. Com isto, o principal objetivo do desenvolvimento de competências é estimular os alunos a construir condições de aprendizagem de conceitos matemáticos e que estas competências sejam efetivas para o aluno ao longo de sua trajetória de vida, estendendo-as para além do contexto escolar.

Em nossa pesquisa o desenvolvimento de competências, a partir da Modelagem Matemática, mostrou-se como ferramenta para a mobilização dos conhecimentos matemáticos dos alunos, provenientes dos raciocínios envolvidos na situação real proposta. Assim, o professor promove a integração de situações provenientes do cotidiano dos alunos e até mesmo de outras áreas do conhecimento nas aulas de Matemática.

REFERÊNCIAS

- BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática na sala de aula. **Perspectiva**, Erechim, v. 27, n. 98, p. 65-74, junho. 2003.
- GREEFRATH, G. et al. Mathematisches Modellieren: Eine Einführung in theoretische und didaktische Hintergründe. In: FERRI, R. B.; GREEFRATH, G.; KAISER, G. (Org.)

- Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule.** 1. Ed. Wisbaden: Springer Spektrum, 2013, p. 11-37.
- BLUM, W. et al. ICMI Study 14: Application and Modelling in Mathematics Education Discussion Document. *Journal für Mathematik-Didaktik*, Berlin, v.23, n.3, p.262-280, Dezembro. 2002.
- BLUM, W. Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht: Herausforderung für Schüler und Lehrer. In: BÜCHTER, A. et al. (Orgs.) **Realitätsnaher Mathematikunterricht: vom Fach aus und für die Praxis.** 1. Ed. Berlin: Franzbecker, 2006. p. 8-23.
- BLUM, W.; FERRI, R. B. Mathematical Modelling: can it be taught and learnt? **Journal of Mathematical Modelling and Application**, Blumenau, v. 1, n. 12, p. 45-58, Dezembro. 2009.
- BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos.** Tradução de Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. 12. Ed. Portugal: Porto Editora, 1994.
- FERRI, R. B. Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik – ZDM – The International Journal on Mathematics Education**, Berlin, v. 38, n. 2, p. 86-95, Abril. 2006.
- MAAß, K. Barriers and opportunities for the integration of modelling in mathematics classes: results of an empirical study. In: BLOMHOJ, M.; BRANDELL, G.; NISS, M. (Eds.) **Teaching Mathematics and Its Application: The 10th ICME**, Conpenhagen: Springer, v.24, n. 2-3, p. 61–74, Setembro. 2005.
- MEYER, J. F. C. de A; CALDEIRA, A. D; MALHEIROS, A. P. S. **Modelagem em Educação Matemática.** 3^a ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.
- NISS, M.; BLUM, W.; GALBRAITH, P. L. Introduction. In.: BLUM, W.; GALBRAITH, P. L.; HENN, H-W; NISS, M. (Orgs.). **Modelling and Applications in Mathematics Education.** The 14th ICMI Study. New York: Springer, 2007. p. 3-32.
- PETER-KOOP, A. “Wie viele Autos stehen in einem 3-km-Stau?": Modellbildungsprozesse beim Bearbeiten von Fermi-Problemen in Kleingruppen. In: RUWISCH, S.; PETER-KOOP, A. (Orgs.). **Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule.** 1. Ed. Offenburg: Mildenerger, 2003. p.111-130.
- STEIN, M. K.; SMITH, M. S. Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: da investigação à prática (artigo original publicado em 1998). **Educação e Matemática:** Associação de Professores de Matemática, Portugal, v.5, n. 105, p.22-28, Nov./Dez. 2009.
- WATSON, A. et al. Introduction. In: MARGOLINAS, C. (Ed.). **Task Design in Mathematics Education.** Oxford: ICMI Study 22, Jul 2013, p. 9-15.
- ZANELLA, M. S. **Tarefas de modelagem matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: um estudo com alunos alemães e brasileiros.** 2016. 273 folhas. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá. 2016.

Recebido em: 01/11/2016
Aprovado em: 24/03/2017