

MODELAGEM MATEMÁTICA EM DISCIPLINAS DO ENSINO SUPERIOR: O QUE MANIFESTAM OS ESTUDANTES?



Vol. 12 Número 24 Jan./Abr. 2017

Ahead of Print

MATHEMATICAL MODELING ON UNDERGRADUATE DEGREE: WHAT DO STUDENTS EXPRESS?

Rodolfo Eduardo Vertuan¹

Karina Alessandra Pessoa da Silva²

Adriana Helena Borssoi³

RESUMO: Neste trabalho apresentamos resultados de uma investigação sobre o que manifestam estudantes de dois cursos de licenciatura acerca de suas aprendizagens quando realizam atividades de modelagem matemática. Os dados que sustentam as análises são provenientes da disciplina de Estágio Supervisionado na Educação Básica do curso de Licenciatura em Matemática e da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I do curso de Licenciatura em Química. A partir de agrupamentos realizados no que diz respeito às manifestações de aprendizagem por parte dos alunos pudemos inferir que a disciplina em que se dá a experiência com modelagem matemática e o contexto de cada curso, em certa medida, direcionam as reflexões de cada grupo e significam as atividades de modelagem matemática.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática; Modelagem Matemática; Aprendizagem.

ABSTRACT: In this paper we will present the results of an investigation into what the students from two degree courses express about their learning experience when doing mathematical modeling activities. The data used in the analysis, in part, originate from a course of Supervised Practice in Basic Education of Mathematical graduation and, in part, from a course in Differential and Integral Calculus I of a Chemical degree course. As from grouping organized about the students' expressions about their learning we understood that the course where happened the experience with mathematical modeling and the context from each course, somehow, direct the reflections of the each group and give meaning the mathematical

¹ Docente da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, UTFPR, Campus Toledo, e do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da UTFPR, Campus Londrina e Cornélio Procópio. Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina, UEL.

² Docente da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, UTFPR, Campus Londrina, e do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da UTFPR, Campus Londrina e Cornélio Procópio. Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina, UEL.

³ Docente da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, UTFPR, Campus Londrina, e do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da UTFPR, Campus Londrina e Cornélio Procópio. Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina, UEL.

modeling activities.

KEYWORD: Mathematics Education; Mathematical Modeling; Learning.

Introdução

A Modelagem Matemática como área de pesquisa da Educação Matemática se insere em um cenário promissor, tendo em vista o crescimento de publicações em periódicos e a participação da comunidade de pessoas interessadas no ensino e na aprendizagem da Matemática em eventos da área. Parte do entusiasmo pode ser creditada ao crescimento de programas de pós-graduação no cenário nacional, dentre os quais estão os mestrados profissionais, que têm o apelo ao desenvolvimento de pesquisa aplicada à educação escolar.

Os autores desse texto têm a modelagem matemática presente tanto na atuação em nível de graduação, onde têm a oportunidade de trabalhar com a formação de professores, em cursos de licenciatura, como no curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática em uma universidade Federal do Norte do Paraná.

No que tange à graduação, este texto tem o propósito de apresentar resultados de uma investigação sobre o que manifestam os alunos do ensino superior acerca de suas aprendizagens quando realizam atividades de modelagem matemática. Os dados que sustentam as análises são provenientes da disciplina de Estágio Supervisionado na Educação Básica 2 (ESEB2) do curso de Licenciatura em Matemática e da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I (CDI1) do curso de Licenciatura em Química de dois câmpus da referida universidade.

Ao nos remetermos à aprendizagem em ambiente escolar, estamos considerando-a como um processo ao longo do qual o aluno internaliza conceitos, e o faz a partir de suas experiências, as quais são influenciadas pela interação com outras pessoas, com aspectos sociais e culturais. Assim, há que se considerar que no ambiente escolar a aprendizagem está associada à ação e à reflexão desse aluno. O entendimento de aprendizagem que temos é alinhado com a visão vygostkyana. Segundo Vygotsky (2007, p.100), “[...] o aprendiz humano pressupõe uma natureza social específica e um processo por meio do qual as crianças penetram na vida intelectual daqueles que as cercam”.

Desse modo, embora a aprendizagem seja essencialmente ação do indivíduo que aprende, na concepção ora assumida ela é considerada dependente da “[...] interação desse indivíduo com os outros, sejam eles os colegas, o professor, um livro, ou até mesmo 'vozes' advindas de experiências anteriores que ecoam em sua mente” (VERTUAN; BORSSOI; ALMEIDA, 2013, p.64).

Ainda assim, sendo a aprendizagem um processo interno ao indivíduo, o que se pode fazer em uma investigação cujo objeto de interesse é a aprendizagem, é conhecer as manifestações dos sujeitos e inferir o quê de aprendizagem essas manifestações podem revelar. Isso implica em explicitar os tipos de dados que, consideramos, podem ser entendidos como manifestações de aprendizagem na pesquisa, especificamente neste caso, não só as ações dos alunos envolvidos, suas falas, reflexões e registros escritos, mas principalmente, o que dizem sobre o que fizeram, o que dizem sobre o que pensam e o que compartilham. Isso porque, conforme evidencia Borssoi (2004, p.2) “a aprendizagem da matemática efetivamente acontece quando o estudante consegue atribuir significado sobre os conceitos ou ideias matemáticas e passa a usar e compartilhar esses significados”.

Na investigação, ainda, assumimos a modelagem matemática como alternativa pedagógica que tem potencialidade de promover a aprendizagem em matemática, considerando múltiplas possibilidades de problematização e encaminhamentos, além de ser característico das atividades de modelagem o trabalho em grupo que, de modo geral,

promove a participação ativa e a interação dos pares e destes com o professor, sendo que nessa interação social, as discussões, as intenções, a partilha de significados podem determinar a ocorrência de aprendizagens.

Rellensmann e Schukajlow (2016) reúnem resultados tanto da psicologia quanto da Educação Matemática que mostram que os professores podem desencadear o interesse dos alunos por meio da proposição de tarefas de aprendizagem que sejam vistas como significativas pelos alunos.

A partir dessa introdução, o texto apresenta aspectos sobre a modelagem matemática na Educação Matemática. Em seguida são colocados os aspectos metodológicos em que os contextos analisados são caracterizados, bem como são informados os procedimentos de análise dos dados e a natureza desses dados. A próxima seção descreve uma redação analítica do que manifestam os estudantes do Ensino Superior ao trabalhar com modelagem. A partir do reconhecimento de proximidades e convergências nas manifestações dos estudantes, em cada contexto analisado, foram organizados agrupamentos que remetem às aprendizagens dos estudantes relacionadas às suas experiências com modelagem matemática, para depois estabelecer uma nova busca por aproximações nos dois contextos.

Modelagem matemática

Na literatura, existem diferentes caracterizações para a expressão modelagem matemática na Educação Matemática. Para nosso propósito, estamos alinhados à compreensão de modelagem matemática enquanto processo orientado pela busca de solução para um problema originário, de modo geral, a uma situação não matemática. Nesse sentido, Blum e Borromeo Ferri (2009) destacam que o envolvimento com modelagem matemática possibilita uma articulação entre situação do mundo real e matemática. Para esses autores, no processo de modelagem matemática:

Primeiro, a situação-problema precisa ser entendida pelo resolvidor de problemas, e um modelo real da situação precisa ser construído. Em seguida, a situação precisa ser simplificada, estruturada e tornada mais precisa. Em particular, o resolvidor de problemas tem que definir o que de fato 'vale a pena'. [...]. A matematização transforma o modelo real em um modelo matemático que consiste de certas equações. Trabalhando matematicamente (calculando, resolvendo equações, etc.), os resultados matemáticos são interpretados no mundo real com os resultados reais [...]. Uma validação destes resultados pode mostrar a necessidade de retomar o processo uma segunda vez [...] (BLUM; BORROMEO FERRI, 2009, p. 46-47).

Levando em consideração esse processo, ponderamos que “a modelagem matemática é sempre sobre algo que não é propriamente do campo da Matemática, mas a compreensão deste algo é mediada pela compreensão e pelo uso da Matemática” (ALMEIDA, SILVA, VERONEZ, 2015). Além disso, a leitura, a comunicação, a concepção e aplicação de estratégias de resolução de problemas por parte do envolvido com uma atividade de modelagem matemática estão alinhados à ótica de seus conhecimentos, sejam com relação à situação-problema em estudo, sejam com relação à matemática que emerge dessa situação.

Trata-se, portanto, de um processo interpretativo e criativo em que uma estrutura matemática é estabelecida para representar a situação em estudo. Essa estrutura matemática consiste em um sistema conceitual, descritivo ou explicativo que tem por finalidade descrever, explicar ou prever o comportamento da situação em estudo em linguagem matemática, configurando o modelo matemático da situação. O modelo matemático pode ser expresso por meio de símbolos, diagramas, gráficos, expressões

algébricas ou geométricas.

De modo geral, para desenvolver uma atividade de modelagem estão presentes ações como buscar informações sobre a situação inicial, identificar e selecionar variáveis, elaborar hipóteses, realizar simplificação, obter um modelo matemático, resolver o problema por meio de procedimentos adequados e analisar a solução.

A ação de deduzir um modelo matemático específico para uma situação já configura o caminhar para a solução de um problema inicialmente definido. Nesse sentido, Blomhøj e Kjeldsen (2011) defendem que para ocorrer a construção do modelo, é necessário que os alunos sejam expostos a situações que os levem à reflexão sobre o processo de modelagem e à função dos modelos em diferentes contextos. Com isso, os alunos passam a ter familiaridade com o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática e a lidar adequadamente com uma variedade de dados.

A abordagem de modelagem matemática em diferentes contextos possibilita a aproximação entre Matemática e outras áreas de conhecimento que permeiam a situação-problema em estudo. Nesse sentido, concordamos com Perrenet e Zwaneveld (2012, p. 3) quando afirmam que “a modelagem matemática é, em primeiro lugar sempre sobre algo, uma situação e um problema decorrente dessa situação, e que a matemática é ‘apenas’ uma parte de todo o processo”. Para tanto, consideramos que uma atividade de modelagem se origina de algo que não é propriamente do campo da matemática, mas é possível fazer uma interpretação matemática para esse algo, de modo que conhecimentos matemáticos estejam presentes. Entendemos, portanto, que em modelagem matemática se fazem necessários o uso e a aplicação da Matemática, possibilitando sua aprendizagem.

Nesse sentido, defendemos a introdução e o uso da modelagem matemática nos diversos níveis de escolaridade, em particular no Ensino Superior, e em diferentes cursos e disciplinas. O que destacamos, no entanto, é que a incorporação de atividades de modelagem nas aulas de Matemática pressupõe que os professores estejam preparados para desempenhar um papel ativo na organização, implementação e avaliação destas atividades.

Aspectos metodológicos

Para investigar o que manifestam os alunos do ensino superior acerca de suas aprendizagens quando realizam atividades de modelagem matemática, pautamos nossa pesquisa em atividades desenvolvidas em disciplinas e cursos de licenciatura de dois câmpus da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Os cursos e as respectivas disciplinas cujas atividades foram desenvolvidas são Licenciatura em Matemática, na disciplina de Estágio Supervisionado na Educação Básica 2 e Licenciatura em Química, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

No âmbito da disciplina de Estágio Supervisionado na Educação Básica 2 de um curso de Licenciatura em Matemática, os dados são relativos ao primeiro semestre de 2016 e o docente da turma é um dos pesquisadores, também autor deste texto.

No referido estágio, os estudantes fazem observação participante e regências em turmas dos anos finais do Ensino Fundamental. Neste contexto, constituiu-se material de análise o relatório de estágio de uma dupla de estudantes que considerou, explicitamente, a modelagem matemática como metodologia de ensino para suas regências.

Cabe ressaltar que os textos foram escritos pelos estudantes no decurso natural da disciplina, sem orientações que interferissem/influenciassem a coleta de dados. Portanto, foi depois da conclusão da disciplina que os documentos produzidos tornaram-se dados da pesquisa.

No ESEB2, as estudantes Nanda e Bia⁴ propuseram atividades de modelagem tanto em uma Oficina de Matemática com duração de uma hora e meia, preparada para alunos do quinto ao nono ano do Ensino Fundamental, quanto em regências realizadas em duas turmas

de nono ano de um Colégio Estadual do oeste do Paraná (cinco aulas em cada nono ano).

Na oficina, as estagiárias convidaram os alunos para investigar qual a quantidade de água utilizada em atividades rotineiras e diárias como lavar a louça, escovar os dentes e tomar um banho, com e sem a preocupação de economizar água. Para realizar a atividade, os alunos coletaram dados experimentalmente e, a partir deles, empreenderam suas resoluções. Nesse contexto, os conteúdos regra de três simples e a ideia intuitiva de funções emergiram.

Na regência vivenciada no nono ano, a questão de investigação proposta aos alunos foi previamente elaborada considerando o cenário de realização do estágio em um curto espaço de tempo, mas, diferente das oficinas, levou em consideração as observações dos estagiários nas turmas em período anterior à regência. Nesse sentido, o tema escolhido buscou considerar um possível interesse dos alunos, no caso, a quadra poliesportiva da escola, tendo como interrogação: *Considerando como escape⁵ ideal aquele que dista igualmente de cada um dos lados da quadra (área útil mais área de escape), qual deveria ser a "largura ideal" da área de escape?* Segundo consta no relatório de estágio, grande parte dos grupos construiu uma equação do segundo grau no desenvolvimento da atividade, sendo este um conteúdo com o qual os alunos ainda não haviam trabalhado.

No curso de Licenciatura em Química, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, dentre as atividades, os alunos precisam cumprir uma carga horária destinada às Atividades Práticas Supervisionadas (APS), que correspondem a seis horas/aula da carga da disciplina. Nesse contexto a professora, pesquisadora em modelagem matemática, solicita o desenvolvimento de atividades de modelagem em que os alunos, em grupos, investigam uma situação cujo tema é por eles escolhido, do qual é possível estudar conceitos matemáticos. Com o intuito de familiarizar os alunos com atividades de modelagem matemática a professora desenvolve durante o curso atividades dessa natureza.

Para investigar o que manifestam alunos do curso de Licenciatura em Química acerca de suas aprendizagens quando realizam atividades de modelagem matemática, consideramos os relatórios entregues ao final da disciplina, as apresentações que realizaram em dois encontros de três horas/aula e respostas ao questionamento: *Que impressões você teve com o desenvolvimento do trabalho de APS e o que esse contribuiu para sua aprendizagem?* Os trabalhos que subsidiaram nossas análises foram desenvolvidos durante o primeiro semestre de 2015.

A turma era composta por 44 alunos, dos quais dez grupos foram constituídos para desenvolver a APS. Seis grupos optaram por coletar dados experimentais - análise do potencial hidrogeniônico (pH) do solo (atividade A1), tensão superficial da água (A2), pressão em fluidos em repouso (A3), características físico-químicas de tintas (A4), liberação de gás carbônico de refrigerante (A5), velocidade média entre Londrina e Rolândia (A6) - para desenvolver a atividade e quatro utilizaram informações obtidas em fontes diversas - antioxidante presente no biodiesel (A7), biogás como fonte de energia (A8), decaimento radioativo de elemento químico (A9), produção de biogás a partir de dejetos suínos (A10).

A partir dos excertos das manifestações dos alunos e as respectivas inferências para cada curso e disciplina realizamos agrupamentos. A intenção é identificar nas manifestações dos alunos convergências e especificidades com relação a cada curso e disciplina. Em um segundo momento de nossa análise, visando discutir a questão de pesquisa, consideramos manifestações que denotem aprendizagem dos alunos no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

As características dessa pesquisa, desde a coleta de dados até as análises e inferências para a questão investigada, apresentam caráter de "qualitativa", no sentido atribuído por Bogdan e Biklen (1994). Para esses autores, na pesquisa qualitativa os pesquisadores têm como objetivo melhor compreender o comportamento e a experiência humana, o que implica em ser ele, o pesquisador, o principal instrumento da pesquisa.

Acerca do que manifestam os estudantes do ensino superior...

i) que realizam atividades de modelagem matemática em um curso de Licenciatura em Matemática

Considerando nosso entendimento da interrogação de pesquisa e nossa leitura dos relatórios de estágio, buscamos reconhecer proximidades e convergências nas manifestações das estudantes e construir agrupamentos. Neste contexto, elencamos três agrupamentos que dizem acerca das aprendizagens das estudantes relacionadas às suas experiências com modelagem matemática: sobre aspectos da futura prática docente; sobre aspectos relacionados às ações empreendidas pelos alunos do Ensino Fundamental no desenvolvimento das atividades e; sobre aspectos relacionados aos conteúdos matemáticos e às situações investigadas.

O agrupamento “sobre aspectos da futura prática docente” diz respeito às manifestações dos estudantes que denotam alguma aprendizagem ou reflexão acerca da intenção de uso de atividades de modelagem matemática na Educação Básica na condição de professores e às reflexões que realizaram acerca da participação dos alunos do Ensino Fundamental nas atividades.

No relatório de estágio, até por conta da especificidade do contexto da referida produção, excertos que exemplificam esse agrupamento foram recorrentes. O fato de as estagiárias escolherem utilizar a modelagem como metodologia no decorrer das regências, aliás, já denota uma predisposição para seu uso em futura prática docente.

Neste primeiro agrupamento estão considerados os modos de um professor agir em uma atividade de modelagem matemática; o planejamento de uma aula que utiliza a modelagem matemática; e o envolvimento de alunos do Ensino Fundamental nas aulas.

No que concerne aos modos de um professor agir em uma atividade de modelagem matemática, destaca-se a intenção das estagiárias em mediar as discussões dos alunos sem que essa mediação conduzisse a resolução: “*A todo o momento, [...] evitávamos fazer perguntas fechadas, por não serem muito adequadas naquele momento, visto que [...] esse tipo de pergunta, deixa espaço para uma única resposta, bem objetiva e que para respondê-la é necessário apenas identificar na fala da professora a palavra ou frase pronta*”.

De todo modo, apesar dessa intenção, em outro excerto as estagiárias realizam uma inferência do possível motivo que pode ter levado os alunos do Ensino Fundamental a realizarem abordagens parecidas entre si. Segundo elas, “*em relação às resoluções dos alunos, observamos que os grupos em geral optaram por seguir a mesma estratégia [...]. Acreditamos que isso se deva ao fato do nosso excesso de intervenções*”.

O conjunto dessas duas reflexões das estagiárias denota, de um lado, o conhecimento teórico de como vislumbram a ação do professor no desenvolvimento de uma atividade de modelagem e, de outro, a dificuldade em se empreender ações em um paradigma diferente daquele vivenciado em toda uma formação escolar. Parece que, tradicionalmente, o trabalho do professor está associado à necessidade de falar o tempo todo, de dar respostas em vez de sugerir reflexões, de centrar as atenções em vez de partilhar as discussões. Certamente, isso pode diminuir a possibilidade de os alunos pensarem acerca dos problemas que intentam solucionar por si sós.

Neste contexto, embora a implementação de atividades de modelagem nas salas de aula pareça fortemente influenciada pela tradição escolar, o reconhecimento das estagiárias de que podem ter realizado intervenções inadequadas sinaliza a possibilidade de práticas de mediação diferentes em uma nova experiência.

Também relacionado aos aspectos da futura prática docente, o planejamento de uma aula que utiliza a modelagem matemática foi tema presente no relatório de estágio em diferentes momentos, a começar pela justificativa das estagiárias em optar pelo trabalho com

a modelagem matemática: “[...] esse problema inicial 'rompeu' com a ideia que os alunos supostamente tinham que era uma aula de explicação, exemplo e exercícios ou de 'problemas prontos'. Por isso, pensamos nessa atividade introdutória de Modelagem Matemática”.

Esse trecho do relatório se justifica devido ao estranhamento inicial dos alunos do Ensino Fundamental frente a um problema de matemática sem informações numéricas, como se algo ainda tivesse que ser informado ou feito pelos professores regentes. Esse estranhamento pode ser verificado no excerto seguinte: “Depois que terminamos a leitura [do problema], os alunos no geral fizeram caras de espanto e de desentendimento e, por isso, não demorou muito tempo para surgirem as dúvidas: 'Não entendi nada...!', 'O que é área de escape?', 'Essa é a pergunta?'. Acreditamos que, para eles, olhar para aquele cartaz e não ver números (algum dado numérico, por exemplo, correspondente à largura e comprimento da quadra), era estranho, era como se a professora tivesse esquecido de escrever mais informações do problema”.

De todo modo, segundo as estagiárias, “[...] o desconforto dos alunos em relação aquele problema não durou muito tempo. Aos poucos, [...] os alunos passaram a se sentir mais familiarizados com a situação-problema e por isso, mais confiantes em tentar resolver”. Este último excerto sinaliza que, apesar do estranhamento inicial dos alunos, as suas dificuldades deram espaço às suas iniciativas e ao envolvimento dos mesmos com a atividade. Isso, por sua vez, contribuiu para que as estagiárias considerassem as atividades abertas, como são as atividades de modelagem, como possibilidades reais para o contexto da sala de aula.

Os dados evidenciam, ainda, que o planejamento de uma aula em modelagem matemática, embora tenha que acontecer, tem inerente uma especificidade, a de, na sua concretização, não poder sobrepor-se às experiências dos grupos de alunos e às ideias suscitadas nas discussões. Ou seja, os docentes não devem realizar interferências demasiadas que forcem a ocorrência do que foi vislumbrado no planejamento inicial, muito embora esse planejamento deva considerar diferentes encaminhamentos para a situação em estudo e buscar antecipar possíveis dúvidas e dificuldades dos alunos.

Em modelagem, portanto, mesmo que o docente imagine possibilidades de resolução para a questão de investigação, são as discussões dos alunos, a partir de seus conhecimentos e no âmbito dos grupos, que direcionam a resolução e as possibilidades de aprendizagem.

Ainda no agrupamento “sobre aspectos da futura prática docente”, consideramos as manifestações dos alunos no que diz respeito ao envolvimento de alunos do Ensino Fundamental nas aulas em que vivenciaram a experiência de lidar com atividades de modelagem matemática. Esse envolvimento nem sempre foi da turma toda. Embora no relatório conste que “em todas as atividades práticas [...] os alunos participaram, alguns coletando os dados, outros participando das simulações e no fazer contas matemáticas, [com] 100% de participação dos alunos”, também consta que em alguns momentos da resolução da parte matemática, havia alunos que esperavam que outros componentes do grupo fizessem a tarefa.

Outros excertos também denotam que o envolvimento dos alunos ora se deu pela mediação docente, ora devido ao próprio engajamento dos alunos no desenvolvimento da atividade. Na situação da quadra poliesportiva, depois das duas primeiras aulas os alunos obtiveram uma equação do segundo grau para resolver, sem, no entanto, terem ideia de como proceder para isso. Aliás, nas próximas aulas é que as estagiárias trabalharam com o método para resolução de uma equação do segundo grau. No entanto, ao iniciarem essa “próxima aula”, as estagiárias verificaram que alguns alunos já haviam resolvido a equação porque buscaram informações de como fazer isso na internet.

O segundo agrupamento, “sobre aspectos relacionados às ações empreendidas pelos alunos no desenvolvimento das atividades”, trata das manifestações das estagiárias quando analisam as ações dos alunos do Ensino Fundamental em relação às suas dificuldades

e às suas criações. Quando as estagiárias buscam compreender esses aspectos presentes na regência, colocam-se, mesmo que de modo inconsciente, no lugar que de fato ocupavam no momento, o “lugar de docentes da turma”, que se preocupavam com as aprendizagens de seus alunos e, por isso, inclusive, ficavam atentas aos seus modos de pensar e às suas dificuldades.

Segundo consta no relatório de estágio, algumas das dificuldades dos alunos do Ensino Fundamental incidiram no uso dos instrumentos necessários para a coleta de dados, no momento da experimentação, tais como mensurar a quantidade de água em baldes depois de simular um banho, por exemplo, ou utilizar a fita métrica no momento de mensurar as medidas da quadra poliesportiva da escola: “[...] não esperávamos que alguns grupos teriam dificuldades em medir a largura e o comprimento da quadra com a fita métrica, no sentido de interpretá-la, de saber se aquele valor estava em centímetros, em metros ou polegadas”.

Por vezes, essas dificuldades é que suscitaram momentos criativos em relação às ações dos alunos. Esse aspecto pode sugerir que, em modelagem, os momentos de criação são precedidos de momentos de enfrentamento de problemas e dificuldades. Segundo as estagiárias, “Nessa atividade introdutória, foi possível observar muitas ideias interessantes por parte dos alunos, como por exemplo, um dos grupos que não tinha fita métrica, passou a medir a largura e o comprimento da quadra com o pé, isto é, mediram o pé de um dos integrantes do grupo, com uma régua, e pediram para que o mesmo caminhasse por cima da linha branca ou de uma rachadura da quadra, passo a passo, encostando um pé no outro”.

De todo modo, parece que tanto as dificuldades quanto os momentos de criação dos alunos estavam fortemente relacionados à matemática utilizada no desenvolvimento da atividade de modelagem e ao contexto extra matemático da situação. Neste sentido é que se dá o próximo agrupamento, “sobre aspectos relacionados aos conteúdos matemáticos e às situações investigadas”.

Este agrupamento constitui-se de aspectos suscitados pelas atividades de modelagem matemática, embora não tratem da modelagem especificamente. São unidades deste agrupamento: a validação de algoritmos já conhecidos e a aprendizagem de novos algoritmos; a ressignificação de conteúdos matemáticos aparentemente já conhecidos; a reflexão sobre crenças construídas pelos alunos em sua trajetória escolar; e a aprendizagem dos alunos para além dos conceitos matemáticos.

No que concerne à validação de algoritmos já conhecidos, as estagiárias evidenciaram o uso, pelos alunos do Ensino Fundamental, de estratégias que em outro contexto funcionavam e que no novo contexto não se mostrava mais eficaz, como aconteceu quando os alunos tentarem resolver uma equação do segundo grau procedendo do mesmo modo como procediam ao resolver uma equação do primeiro grau: “pode-se notar também que os grupos B e D, na hora de registrar a equação final, optaram por deixar os valores que acompanham as incógnitas de um lado e o valor independente do outro lado, conforme eles aprenderam em equação do primeiro grau. Porém, viram que encontrar o valor de x não era tão simples assim”.

Neste contexto, a apresentação do método para encontrar as raízes de uma equação do segundo grau se deu, não por imposição, ou porque era o conteúdo da vez, mas porque os conhecimentos que os alunos tinham até então não eram suficientes para dar conta do novo obstáculo, este que, por algum motivo, tinham interesse em superar. Isso também é próprio da atividade de modelagem matemática.

Outra análise interessante realizada pelas estagiárias diz respeito às dificuldades provisórias dos alunos do Ensino Fundamental em relação à execução de algoritmos contextualizados à situação de investigação. Para elas, “alguns grupos tinham dificuldades em operações algébricas, como por exemplo a multiplicação de binômios. Nesse caso, logo que

fazíamos o gesto indicando a propriedade distributiva, os grupos exclamavam: 'Ah tá!' e conseguiram realizar os cálculos [...]. Este aspecto [...] nos leva a levantar a hipótese de que alguns conhecimentos, conteúdos e técnicas matemáticas estão sendo aprendidas sem contextualização” e que a mesma operação, se fosse apresentada aos alunos isolada de contexto, tal qual estão habituados a ver na escola, talvez não representasse tanta dificuldade ou estranhamento.

As estagiárias sinalizaram, ainda, a possibilidade de a atividade de modelagem promover aos alunos visitas constantes aos conceitos matemáticos aparentemente já aprendidos, de modo a ressignificá-los. Afirmam, por exemplo, que “[...] os alunos tinham na cabeça apenas a ideia do multiplicar cruzado, isto é, não sabiam porque se multiplicava daquele jeito, apenas faziam assim porque o professor em sala de aula havia explicado ou dito que era só multiplicar”. Nesse sentido, relacionando matemática com o cotidiano, as estudantes inferem que “[...] os alunos passaram a compreender a regra de três simples e do porque multiplicamos cruzado”.

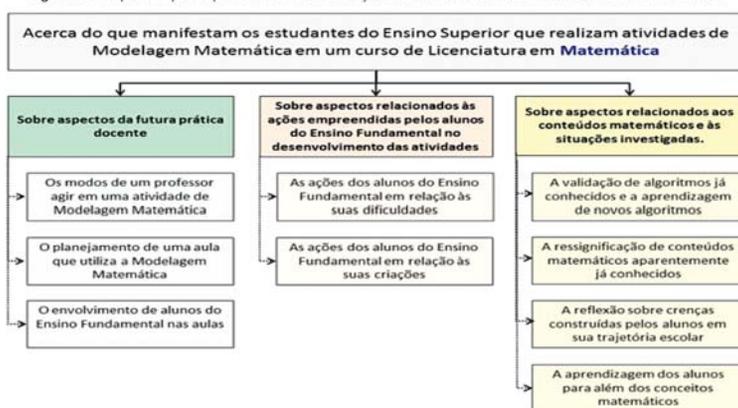
Ainda em relação ao conteúdo matemático, para as estagiárias, resolver uma equação do segundo grau cujos coeficientes não eram números inteiros, e obter como raízes também números não inteiros, possivelmente “[...] rompeu a possível crença de que os coeficientes só poderiam ser inteiros”. Isso porque as equações até então resolvidas pelos alunos em suas trajetórias escolares, possivelmente, em sua maioria, tivessem coeficientes e respostas inteiras.

Finalmente, no que tange à investigação da situação em estudo, as estagiárias consideraram positiva a possibilidade de os alunos do Ensino Fundamental, ao vivenciarem atividade de modelagem, aprenderem para além da matemática. Isso pode ser verificado, por exemplo, na situação da quantidade de água que se consome em atividades diárias. Segundo as estagiárias, “pode-se notar que essas atividades causaram certo espanto nos alunos em relação à quantidade de água que eles gastam diariamente. Dava pra ver no olhar e nos comentários dos grupos uma preocupação com o uso da água”.

Este excerto sugere que o ensino de Matemática, tal como acontece com atividades de modelagem matemática, pode possibilitar discussões de aspectos da vida diária que, naturalizados, pouco são objeto de estudo e reflexão, como é o caso da utilização consciente da água nas atividades diárias, por exemplo.

Esquematizamos considerações acerca do que manifestam os estudantes do Ensino Superior que realizam atividades de modelagem matemática em um curso de Licenciatura em Matemática na Figura 1.

Figura 1- Esquema que representa as manifestações dos estudantes em Licenciatura em Matemática



ii) que realizam atividades de modelagem matemática em um curso de Licenciatura em Química

Diante das temáticas escolhidas pelos grupos do curso de Licenciatura em Química e do manejo na coleta de dados, bem como do desenvolvimento da atividade e o que disseram no questionamento e na apresentação, estabelecemos três agrupamentos sobre aprendizagens dos alunos relacionadas às suas experiências: sobre aspectos de prática de laboratório; sobre aspectos relacionados ao trabalho em grupo e; sobre aspectos relacionados aos conteúdos matemáticos.

Com o desenvolvimento de atividades de modelagem que fizeram uso do laboratório para coleta de dados, os alunos puderam articular práticas de laboratório com vistas a fazer uma abordagem matemática, possibilitando ações como: realização de pesquisa, envolvimento com outros profissionais, articulação entre teoria e prática.

A realização de pesquisa sobre um fenômeno de interesse é uma ação presente em atividades de modelagem e instigada nos alunos quando realizam uma experimentação. Além de considerar os materiais e os procedimentos da experimentação, os alunos necessitaram buscar outras informações, principalmente quando o experimento precisava ser refeito, pois apresentava algum resultado não satisfatório. Isso fica evidente no relato de um integrante que desenvolveu A5: *“A gente pensou que o refrigerante liberasse o gás rápido, acontece isso quando deixamos aberto, mas dependendo da quantidade avaliada não é tão rápido assim. Daí percebemos que se o refrigerante está com temperatura mais elevada, essa liberação é mais rápida e voltamos para o laboratório com essa hipótese e realizamos o aquecimento. Mas para usar essa hipótese tivemos que pesquisar!”*. Essa ação denota que esse grupo de estudantes considerou a hipótese para o desenvolvimento do experimento após ter realizada uma prática, o que inviabilizou um resultado imediato para o que se propuseram a investigar.

Na prática de laboratório, os alunos necessitaram estar em constante contato com técnicos de laboratório e estagiários responsáveis para acompanhar o desenvolvimento da coleta de dados. Isso é uma regra exigida pela instituição para evitar acidentes. Nesse sentido, houve uma aproximação entre os estudantes e os responsáveis técnicos pelo laboratório, conforme relatou um dos integrantes que desenvolveu A4: *“O técnico até ficou nosso colega, pois chegamos com latas de tintas várias vezes para fazer a análise e claro que deixamos esse material lá no laboratório para outras pessoas utilizarem, apesar de termos dado trabalho ele ainda nos agradeceu! [risos].”*

Algumas atividades possibilitaram articulação de teoria e prática, bem como relação entre conteúdos matemáticos e químicos. Em questionário respondido, um dos integrantes que desenvolveu A8 afirmou que: *“Gostei da relação entre teoria e aplicação prática destes conceitos [matemáticos], que torna a disciplina mais atraente”*. O que podemos evidenciar é que para esse aluno o laboratório constitui-se em um espaço em que a aplicação da matemática foi prazerosa.

Conteúdos inerentes a processos químicos também se fizeram presentes, conforme mencionado por integrantes da atividade A5: *“[...] montar o experimento não foi uma tarefa fácil, pois é necessário levar em consideração o comportamento das substâncias envolvidas, suas interações químicas e as condições de ambientes influentes”* / *“[...] foi necessário um estudo aprofundado sobre alguns temas da área de química e ainda trabalhar a matemática juntamente”*.

Em se tratando de uma atividade avaliativa e que deveria ser realizada em grupo, aspectos relacionados a aprender a trabalhar em grupo se fez presente por parte de alunos que estavam iniciando a atividade acadêmica e que precisavam administrar possíveis divergências internas, conforme relato de duas integrantes que desenvolveram A2: *“[...] como não conhecemos as pessoas que fazemos o grupo foi um pouco complicado por falta de comprometimento”* / *“O trabalho foi muito bom pois aprendemos a trabalhar em grupo, embora*

no começo houveram várias intrigas sobre o tema do trabalho e ficamos sem uma integrante do grupo”. No entanto, os alunos entendem que na atividade profissional o trabalho em grupo é necessário, conforme mencionado por integrante que desenvolveu A9: “A gente precisa saber trabalhar em grupo, pois lá fora não estaremos sozinhos, teremos outros colegas professores que pensarão diferente da gente!”.

A proposta do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática enquanto Atividade Prática Supervisionada, além de possibilitar a prática de laboratório e o trabalho em grupo, tinha como objetivo a abordagem matemática para o fenômeno em estudo.

Enquanto futuros professores de Química, a escolha de temáticas na área foi pertinente e a leitura e a interpretação matemática das situações-problema se destacaram seja na obtenção de modelos matemáticos sejam na aplicação de modelos matemáticos presentes na literatura para obter uma solução para o problema ou para fazer uma abordagem considerando os conteúdos estudados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

A obtenção de modelos matemáticos foi realizada por meio de técnicas estudadas para representar funções e obter seus coeficientes, bem como por meio de softwares de ajustes de curva como o Excel e o Curve Expert.

Nas atividades A4, A8 e A10 os alunos utilizaram técnicas relacionadas a informações que coletaram em fontes diversas para representar por meio de uma expressão o que se propuseram a investigar. Na atividade A8, por exemplo, para determinar o modelo matemático da quantidade de biogás de acordo com a quantidade de lixo bruto, os alunos utilizaram informações em que para cada 1kg de lixo bruto produzido, 77g são biodegradáveis e que 1kg de lixo biodegradável processado gera 0,059 m³ de biogás.

Recurso computacional e técnicas matemáticas foram utilizados na dedução dos modelos matemáticos das atividades A1, A5 e A6. A análise de amostras de solo da universidade (A1), permitiu aos alunos investigarem o comportamento dos dados obtidos experimentalmente e representados no plano cartesiano com o auxílio do Excel. Por hipótese, consideraram um modelo quadrático para determinar o potencial hidrogeniônico (pH) de acordo com a profundidade da coleta. Os coeficientes do modelo matemático foram obtidos por meio de um sistema de equações lineares com duas equações e duas incógnitas. Na apresentação do trabalho, um dos integrantes mencionou a necessidade de retomar conceitos matemáticos para a obtenção do modelo matemático: “Apresentando o resultado aqui parece que foi fácil. Mas nem de longe, porque além do trabalho no experimento, teve a abordagem de resolução do sistema de equações para determinar os coeficientes a, b e c. Dizer que o modelo matemático era de segundo grau a gente viu por meio dos pontos no plano cartesiano, mas depois fazer as continhas... meu caderno de cálculo estava sempre do nosso lado”.

Para representar matematicamente o volume de gás carbônico desprendido do refrigerante em função do tempo obtido experimentalmente, os integrantes que desenvolveram A5 fizeram uso do software Curve Expert para ajustar um modelo polinomial de quarto grau. Com a expressão algébrica, calcularam a taxa de variação do volume de gás carbônico liberado em função do tempo e a massa de gás liberado, para isso, utilizaram a equação da lei dos gases, articulando aspectos matemáticos aos químicos. Nessa atividade, os integrantes do grupo se empenharam em realizar uma interpretação matemática no contexto químico, extrapolando o que se propuseram a investigar. Em relato, um integrante deixa clara essa necessidade: “A gente queria usar linguagem matemática em experimentos da nossa área de atuação, mas permanecer nessa área, porque aplicar limite e derivada em funções quaisquer já fizemos em alguns momentos de aulas.”

Os integrantes que desenvolveram A6, por sua vez, fizeram uso tanto do Excel

quanto do Curve Expert para expressarem o modelo matemático que representa a velocidade de deslocamento em diferentes momentos durante o trajeto da casa de um dos integrantes que reside em Rolândia até a universidade em Londrina. Com o modelo matemático representado por uma função de quarto grau, os alunos calcularam a derivada e a integral e estabeleceram relações com a situação em estudo, conforme destacado por um dos integrantes: *“Se a gente calcular a derivada da velocidade em função do tempo, obtemos o modelo que descreve a aceleração em função do tempo; A integral indefinida nesse caso é um conjunto de funções que quando derivadas obtemos a função original que [na situação] representa o deslocamento em função do tempo. Podemos determinar o valor de k igualando a função a 32,3 quilômetros que é o percurso total de minha casa até aqui na universidade. Também, com o modelo matemático da velocidade, também podemos determinar o valor de máximo e mínimo absolutos e relativos para saber em que momento a velocidade foi máxima e foi mínima no trajeto. E a gente calcula a derivada primeira de $V(t)$ e iguala a zero e depois faz o teste da derivada segunda.”*

Modelos matemáticos presentes na literatura foram aplicados em uma situação particular com dados obtidos experimentalmente (A2 e A3), em trabalhos científicos já publicados (A7) e seguindo procedimentos e resultados de outras atividades desenvolvidas em sala de aula (A9).

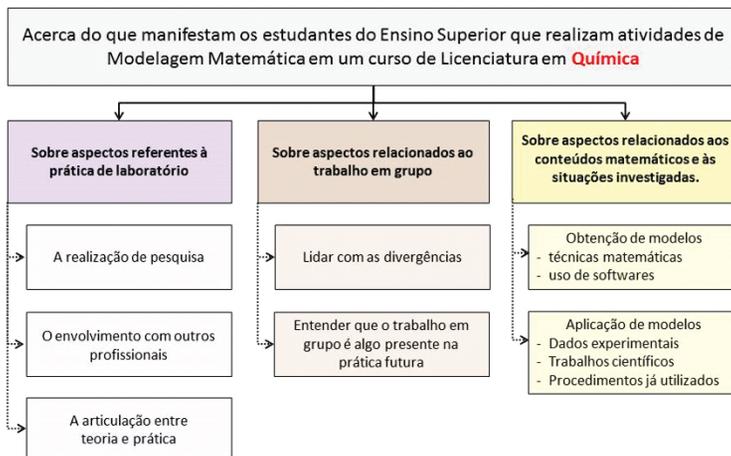
Para estudar a pressão da água no interior do corpo humano, os integrantes que desenvolveram A2 fizeram uso de expressões algébricas existentes na literatura sobre a tensão superficial. Para um dos integrantes que desenvolveu essa atividade: *“Achei muito interessante a comparação estabelecida entre a coleta de dados e os resultados matemáticos que foram bem próximos”*.

O estudo da porcentagem de antioxidante presente no biodiesel entre os anos de 2015 e 2020 (em projeção) foi interpretado e representado por uma expressão matemática a partir de dados coletados em um trabalho acadêmico. A partir dessa abordagem, os alunos realizaram pesquisas sobre a temática e, com o uso do Curve Expert, deduziram um modelo matemático para expressar o comportamento do fenômeno no intervalo de tempo estabelecido. Para um dos integrantes da dupla: *“Estabelecer e validar os modelos matemáticos foi a parte mais difícil, apesar de possuir o curve. Entender as variáveis e como elas se relacionam entre si, juntamente com os modelos opcionais dados pelo curve e os gráficos plotados foram bem confusos, mas deu tudo certo”*.

Considerando o estudo de uma atividade desenvolvida em sala de aula, os integrantes que desenvolveram A9 se propuseram a investigar o decaimento radioativo de ^{125}I caso uma pessoa entrasse em contato de forma acidental com esse elemento químico. Com essa abordagem, se fundamentaram no modelo matemático já desenvolvido e analisaram a situação-problemática que se propuseram a investigar.

Podemos esquematizar as considerações acerca do que manifestam os estudantes do Ensino Superior que realizam atividades de modelagem matemática em um curso de Licenciatura em Química por meio da Figura 2.

Figura 2 - Esquema que representa as manifestações dos estudantes em Licenciatura em Química



Fonte: elaborada pelos autores

Discussão e articulação dos resultados

Neste texto, devido à intenção de buscar compreensões acerca do que manifestam alunos de dois cursos de Licenciatura, um em Matemática e outro em Química, acerca de suas aprendizagens quando realizam atividades de modelagem matemática, buscamos descrever as manifestações dos alunos em trabalhos escritos realizados no âmbito de disciplinas desses cursos e reconhecer convergências e especificidades nestas manifestações.

Essas ações desencadearam a elaboração de agrupamentos que, por sua vez, referem-se às aprendizagens dos estudantes relacionadas às suas experiências com modelagem matemática. Esses agrupamentos, vislumbrados inicialmente no âmbito de cada conjunto de dados, foram construídos segundo a perspectiva, já desvelada na introdução deste texto, de que a aprendizagem pode ser manifestada nas reflexões realizadas pelos alunos quando analisam suas práticas, quando apresentam suas estratégias de resolução, quando denotam (in)coerências no uso de conceitos matemáticos e de algoritmos, quando vislumbram possibilidades de raciocínio utilizados pelos seus alunos no decorrer da resolução (no caso das estagiárias), enfim, quando evidenciam, de algum modo, uma reflexão, uma mudança de comportamento ou uma nova experiência.

De todo modo, o que também se revela da investigação é que as aprendizagens manifestadas pelos alunos parecem ter naturezas e finalidades distintas, embora se desenvolvam de modo imbricado e interdependente. Nesta pesquisa, figuram as aprendizagens relacionadas ao uso de estratégias e algoritmos, aqui denominadas de procedimentais, àquelas que dizem dos conceitos matemáticos e de outras áreas do saber, ou conceituais, às relacionadas à comunicação de ideias e ao entendimento de outras perspectivas, ou interpessoais, bem como àquelas com especificidades ligadas à docência, ou aprendizagens da docência.

De todo modo, ao olhar para os diferentes agrupamentos que se verificam entre as Figuras 1 e 2, o que se vislumbra é que apenas um deles foi comum aos dois contextos, a saber, aquele que diz acerca dos aspectos relacionados aos conteúdos matemáticos e à

situação em estudo. Tanto no curso de Licenciatura em Matemática, quanto no curso de Licenciatura em Química, os estudantes apontam aspectos relacionados à obtenção de modelos, às estratégias de resolução, à aprendizagem e utilização de conceitos e algoritmos, bem como a aplicação de modelos e a aprendizagem de aspectos para além da matemática. Isso pode sugerir que, independente das especificidades de cada curso e disciplina, quando se desenvolve atividades de modelagem matemática, aspectos relacionados à aprendizagem de conceitos matemáticos, de estratégias de resolução, de algoritmos e de situações extra matemáticas, são aspectos que emergem no contexto escolar. Mas o entendimento de que esses dois agrupamentos são comuns aos dois contextos pode ser uma ilusão ao leitor mais desatento...

O que se revela é que, de fato, as especificidades das disciplinas influenciam e significam a relação dos alunos com as atividades de modelagem matemática, a começar pelo período de realização das disciplinas. Enquanto o CDII é disciplina do primeiro período do curso de Licenciatura em Química, o ESEB2 é disciplina do sexto período da Licenciatura em Matemática. No sexto período os estudantes já têm um percurso no curso de Licenciatura que os permitem considerar as experiências da licenciatura não mais na condição de aluno, mas na condição de professores em formação.

Desse modo, o papel assumido por cada grupo de estudante (de aluno ou de docente em formação), a disciplina em que se dá a experiência com modelagem e o contexto de cada curso, em certa medida, direcionam as reflexões de cada grupo e significam as atividades de modelagem matemática. Esse significar as atividades de modelagem acontece à medida que das próprias atividades surgem outras possibilidades, reflexões e aprendizagens, como àquelas ligadas à prática de laboratório e ao trabalho em grupo no caso do curso de Licenciatura em Química, e àquelas enfatizadas pelos alunos da Licenciatura em Matemática, quanto à futura prática docente e às contribuições do ambiente de modelagem para os alunos da Educação Básica.

Neste sentido, se considerarmos o agrupamento acerca dos aspectos relacionados aos conteúdos matemáticos e à situação em estudo, é possível inferir que a natureza das aprendizagens manifestadas pelos alunos nos dois contextos é diferente. Enquanto no curso de Licenciatura em Química as aprendizagens dos alunos relacionam-se às suas ações no desenvolvimento das atividades de modelagem e aos procedimentos adotados, ao uso de softwares, às discussões de conceitos matemáticos e à escrita de trabalhos científicos, no curso de Licenciatura em Matemática, as aprendizagens das estagiárias incidem sobre as reflexões que realizam ao lançar olhares para as ações dos seus alunos (participantes da prática de estágio) quando estes vivenciam atividades de modelagem.

Neste último contexto, inferir como “o outro” pensa implica em conjecturar como “eu pensaria se fosse o outro” naquela situação, aspecto essencial para a atividade da docência, mas que como tantos outros aspectos também precisa ser aprendido. Entendemos, inclusive, as atividades de estágio e, por que não dizer, o ambiente de modelagem matemática, espaços profícuos para isso.

Notas

⁴ Os nomes apresentados aqui, são fictícios.

⁵ Denomina-se escape o espaço entre o limite da quadra oficial e o início da arquibancada (no colégio em questão).

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; VERONEZ, M. R. D. Sobre a geração e interpretação

- de signos em atividades de modelagem matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - VI SIPEM, VI, 2015, Pirenópolis. **Anais...** Rio de Janeiro: SBEM, 2015. v. 1. p. 1-12.
- BLOMHØJ, M; KJELDSEN, T. H. Students' reflections in Mathematical Modelling Projects. In: KAISER, G. et al. (eds.). **Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling (ICTMA 14)**. New York: Springer, 2011. p. 385-395.
- BLUM, W.; BORROMEO FERRI, R. Mathematical Modelling: can it be taught and learnt? **Journal of Mathematical Modelling and Application**, Blumenau, v. 1, n. 1, p. 45-58, jan-jun. 2009.
- BOGDAN, R; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. 2.ed. Porto: Porto Editora, 1994.
- BORSSOI, A. H. Modelagem Matemática como Estratégia de Ensino e Aprendizagem: possibilidade para uma educação mais significativa. In: ANPED SUL - SEMINÁRIO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO DA REGIÃO SUL, V, 2004, Curitiba. **Anais...** Curitiba: PUC/PR, 2004. p. 1-13.
- PERRENET, J.; ZWANEVELD, B. The Many Faces of the Mathematical Modeling Cycle. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, Blumenau, v. 1, n. 6, p. 3-21, abr-jun. 2012.
- RELLENMANN, J.; SCHUKAJLOW, S. Does students' interest in a mathematical problem depend on the problem's connection to reality? An analysis of students' interest and pre-service teachers' judgments of students' interest in problems with and without a connection to reality. **ZDM Mathematics Education**, Berlin, v.48, s/n., p. 1-12, out. 2016. doi:10.1007/s11858-016-0819-3.
- VERTUAN, R. E; BORSSOI, A. H; ALMEIDA, L. M. W. O papel da Mediação e da Intencionalidade em Atividades de Modelagem Matemática. **Revista Eletrônica de Educação**, São Carlos, v. 7, n. 3, p. 63-80, set-dez. 2013.
- YOGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. 7.ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

Recebido em: 16/10/2016
Aprovado em: 20/03/2017