

EL PROCESO DE FAMILIARIZACIÓN DE UN PROFESOR CON LA MODELACIÓN MATEMÁTICA: EL CASO DE WILSON



Vol. 12 Número 24 Jan./Abr. 2017

Ahead of Print

O PROCESSO DE FAMILIARIZAÇÃO DE UM PROFESSOR COM A MODELAGEM MATEMÁTICA: O CASO DO WILSON

Francisco Javier Camelo B.¹

Jussara de Loiola Araújo.²

Gabriel Mancera O.³

RESUMEN: En este documento damos cuenta de la trayectoria (no intencional o desprevénida) que siguió un profesor de matemática inmerso en un proceso de familiarización con la modelación matemática en el marco de su interacción en un proyecto de investigación con un profesor más experimentado. Para ello asumimos un marco teórico entorno a la formación de profesores de matemáticas con relación a la modelación y una elección metodológica bajo el paradigma crítico. Como resultados encontramos que el proceso de familiarización del profesor con la modelación matemática se produjo gradualmente, sin las tensiones y obstáculos que habitualmente se presentan, a través de la planificación y la realización de ambientes de modelación que fueron incorporando las características de la modelación asumidas y discutidas con el profesor más experimentado.

PALABRAS CLAVE: Modelación matemática; Formación de profesores; Trabajo colaborativo; Familiarización gradual.

RESUMO: Neste artigo, descrevemos e analisamos a trajetória (não intencional ou inesperada) seguida por um professor de matemática imerso num processo de familiarização com a modelagem matemática em uma interação com um professor mais experiente, durante um projeto de pesquisa. Para tal, nós assumimos um referencial teórico para a formação de professores de matemática com relação à modelagem e adotamos o paradigma crítico como abordagem metodológica. Como resultados, concluímos que o processo de familiarização com a modelagem matemática do professor ocorreu de forma

¹Profesor de la Facultad de Ciencias y Educación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, en Bogotá, Colombia y estudiante del Doctorado Latinoamericano en Educación: Políticas Públicas y Profesión Docente del programa de Posgraduación en Educación de la Universidad Federal de Minas Gerais (UFMG).
fjcamelob@udistrital.edu.co

²Profesora del Departamento de Matemática y del Programa de Posgraduación en Educación de la Universidad Federal de Minas Gerais (UFMG).
jussara@mat.ufmg.br

³Profesor de la Facultad de Ciencias y Educación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, en Bogotá, Colombia y estudiante del Doctorado Latinoamericano en Educación: Políticas Públicas y Profesión Docente del programa de Posgraduación en Educación de la Universidad Federal de Minas Gerais (UFMG).
gmancerao@udistrital.edu.co

gradual, sem as tensões ou obstáculos que habitualmente ocorrem, por meio do planejamento e realização de ambientes de modelagem que foram incorporando as características da modelagem assumidas e discutidas com o professor mais experiente.

PALAVRAS-CHAVE: Modelagem matemática; Formação de Professores; Trabalho colaborativo; Familiarização gradual.

ABSTRACT: In this paper, we describe and analyze the trajectory (unintentional or unexpected) followed by a mathematics teacher immersed in a process of familiarization with mathematical modelling in an interaction with a more experienced teacher during a research project. For this, we assume a theoretical framework about mathematics teacher education regarding to modelling and adopt the critical paradigm as a methodological approach. As results, we conclude that the teacher's process of familiarization with mathematical modelling occurred in a gradual way, without the tensions or obstacles that usually occur, through the planning and realization of modelling environments that were incorporating the modelling characteristics assumed and discussed with the most experienced teacher.

KEYWORDS: Mathematical modelling; Teacher education; Collaborative work; Gradual familiarization.

Introducción

La historia da cuenta de muchos científicos que observando y analizando algún artefacto o alguna idea, inventando algún dispositivo o alguna teoría e inclusive paseando, resultaron, por accidente, analizando, inventando o descubriendo algo totalmente distinto o inesperado. El ingeniero suizo George de Mestral, por ejemplo, estaba *paseando* por los Alpes suizos, en 1941, cuando *observó* que las *espigas* de la setaria se quedaban pegadas al cuerpo humano cuando alguien pasaba cerca de ellas. Este *fenómeno* de la naturaleza lo *sorprendió tanto*, que decidió estudiar la planta con la intención de reproducir su mecanismo en el laboratorio. Así descubrió que el nylon, cosido con rayos infrarrojos, formaba ganchos que se adherían a una tela aterciopelada. A este invento se le conoce como velcro, que es la palabra formada por la unión de los términos “velours” (terciopelo en francés) y “crochet” (gancho en inglés), usado hoy día en la cotidianidad en infinidad de utensilios.

Una historia parecida nos pasó en nuestras prácticas en educación matemática, cuando el profesor Francisco se encontraba clasificando, reflexionando y analizando los datos que construyó para dar cuenta de su propuesta doctoral (*paseando*, podríamos decir, entre sus datos). Él observó que el profesor Wilson, con quien creó una práctica pedagógica en un colegio público de Bogotá (Colombia) bajo presupuestos de la perspectiva política de educación matemática, empezaba a “ser otro” en relación con su quehacer docente (*se le pegaban algunas espigas*). Esta circunstancia, relacionada con la práctica investigativa, nos sorprendió tanto, que decidimos dar cuenta de ese fenómeno en este documento, con el objetivo de describir la trayectoria (no intencional y desprevenida) de un profesor de matemática inmerso en un proceso de familiarización con la modelación matemática.

Para dar cuenta de este objetivo, vamos a reflexionar y analizar cómo los profesores Wilson y Francisco fueron negociando significados sobre la modelación matemática. Cabe señalar que en dicha reflexión y análisis mostraremos cómo la formación de Wilson, que en principio no conocía explícitamente ideas sobre modelación matemática, acabó por vivenciar (accidentalmente) una fuerte formación en esa tendencia de la educación matemática.

Nuestro relato inicia cuando Wilson y Francisco, viejos amigos que solían participar en un grupo de estudio en la época en que cursaron sus estudios de pregrado, acordaron

construir una práctica pedagógica con la intención de producir datos empíricos para ser analizados en la tesis de doctorado que Francisco desarrollaba en la época. Para ello, partieron por aceptar que no existe un entendimiento consensuado en la comunidad de investigadores sobre lo que es la modelación en la educación matemática (KAISER; SRIRAMAN, 2006; KLÜBER, 2012). Ésta puede entenderse, de manera general y, en palabras de Villa (2007), como “la actividad que se realiza en la clase de matemáticas cuya naturaleza se deriva de la actividad científica de la modelización matemática” (p. 70). Es decir, comenzaron por reconocer que la modelación matemática puede interpretarse como la posibilidad que tienen los estudiantes, en el aula de clase de matemáticas, de recrear, en cierta forma, el proceso que los científicos siguieron para dar cuenta de la resolución de ciertos problemas, en general, por medio de la matemática, aunque sus fines y objetivos cambien. Adicional a lo anterior, retomaron los planteamientos de Araújo (2007), para quien la modelación tiene sentido cuando se usan las matemáticas en una situación no matemática del día a día de los estudiantes, en la idea de acercarse a un entendimiento de la situación o para resolver alguna inquietud que se haya generado.

Este encuentro entre Wilson y Francisco resultó ser de gran importancia para los dos, pues Francisco, como ya lo mencionamos, encontró la oportunidad de producir los datos para su investigación doctoral, en un colegio público donde las condiciones sociales y políticas resultan ser complejas, circunstancia que era importante, pertinente y coherente para sus propósitos doctorales. Esta situación llama la atención del profesor Wilson, pues desde hace algún tiempo se viene cuestionando sobre su papel como educador, particularmente como educador matemático, lo que le ha permitido hacerse otras preguntas en relación con qué elementos debe tener en cuenta para proponerle a sus estudiantes experiencias que les resulten significativas. Hace tiempo que Wilson percibe que por más que se esfuerce en organizar sus clases, sus estudiantes no se interesan ni sienten significativamente las actividades que desarrollan en clase.

Así las cosas, en ese encuentro, Wilson y Francisco se proponen trabajar con los estudiantes de grado undécimo, en un ambiente de Modelación que permita entrecruzar las perspectivas propuestas por Villa (2007), Araújo (2009) y Barbosa (2004a), enfatizando en los aspectos denominados como socio críticos por estos dos últimos investigadores. Retomaron, además, algunas de las ideas de Burak (1994, 2004 y 2010) para la implementación del ambiente de aula. La propuesta de crear ambientes de modelación desde una perspectiva socio crítica resulta ser una alternativa, por no decir una tentación, que despierta el interés de Wilson por pensar sus clases de manera diferente a como las viene desarrollando. Bajo este contexto, nacen nuevos cuestionamientos en él: ¿qué es la modelación matemática en el aula de clases? y ¿qué significa desarrollarla desde un enfoque socio crítico?, como se observa en el siguiente diálogo sostenido por los profesores luego de que Francisco le propuso a Wilson trabajar sobre modelación matemática:

Wilson: Listo, Francisco. Vamos a crear el ambiente de modelación que usted dice con los estudiantes de grado once. Pero, ¿y cómo es que son los ambientes de modelación matemática en el aula?

Francisco: Para ello Wilson, podemos leer un artículo y discutirlo antes de empezar.

Wilson: Ah, bueno, y cuando le metamos la idea el enfoque socio crítico, ¿cómo lo desarrollamos?

Para reflexionar sobre lo que aconteció con Wilson —cómo se le pegaron las espigas—, debemos analizarlo a la luz de la formación de profesores de matemáticas con relación a la modelación. En ese sentido, a continuación, y a manera de referente teórico, se plantea

consideraciones a este respecto. Luego describiremos las elecciones metodológicas del estudio y en el siguiente apartado retomaremos la narración de lo que aconteció entre los profesores Wilson y Francisco. Al final mostraremos algunas de las conclusiones encontradas.

Modelación en educación matemática y formación de profesores

En Colombia la investigación en modelación matemática en la educación matemática es aún incipiente. No obstante, hemos identificado algunos trabajos de Villa y sus colegas (VILLA, 2007, 2009; VILLA; RUIZ, 2009; PARRA; VILLA, 2015) en donde se presentan sus resultados de investigación en relación a la formación de profesores de matemáticas en el contexto antioqueño. De otro lado, tanto el colectivo interinstitucional en Educación Matemática Diversidad y Subjetividades –Edumadys– (GARCÍA, et al., 2009), como el grupo de investigación EdUtopía (MANCERA; CAMELO; PERILLA, 2016; CAMELO, 2016), ambos en el contexto bogotano, resaltan aspectos socio críticos de la modelación matemática, buscando reflexionar con los estudiantes, alrededor de situaciones críticas que se abordan para ampliar comprensiones de las condiciones de vida de los individuos y colectivos que participan de ellas, planteando a la modelación como medio y no como fin.

Villa (2007) plantea que es posible recrear el proceso desarrollado por los científicos al elaborar modelos matemáticos en el salón de clases, recreación que denomina modelación matemática. En este sentido, las etapas vividas por el científico deben ser consideradas por el profesor al plantear sus actividades de clase, aunque sus fines cambian, pues el primero persigue la resolución de problemas de la realidad, mientras el segundo persigue fines pedagógicos. Para el autor, las actividades de modelación deben ser preparadas, a priori, por el profesor, pasando por un ciclo de: observación y experimentación, delimitación del problema, selección de estrategias, presentación de soluciones, evaluación y validación y, conexión con otros modelos y situaciones. Según Villa (2007), la formación de profesores se da en la medida en que se toma conciencia de su papel en la dinámica del proceso, pues la modelación puede ofrecerle: i) un espacio para desarrollar y potenciar la creatividad y las capacidades para interpretar el contexto de los estudiantes y utilizarlos en el aula de clase; ii) un medio para una ampliación de las visiones sobre las prácticas de los estudiantes, lo cual le permite al maestro un desarrollo profesional dentro del contexto de su propia aula de clase y iii) la posibilidad de desarrollar las herramientas para interpretar, describir, explicar y documentar los niveles de comprensión de los estudiantes.

Por su parte, en el panorama internacional, la modelación en la formación de profesores –o la formación de los profesores en relación con la modelación– es una de las discusiones más frecuentes. Los libros organizados por la International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications (ICTMA), por ejemplo, siempre traen una sección dedicada exclusivamente a la formación de profesores, como es el caso de la Parte III de Kaiser et al., (2011).

En la comunidad brasileña de modelación en la educación matemática, en particular, en casi todas las Conferencias Nacionales sobre Modelación en la Educación Matemática se ha considerado importante y pertinente mantener en la agenda una mesa redonda dedicada a este tema. La formación del profesorado en modelación puede suceder, según Silva y Oliveira (2012), por lo menos en tres áreas: formación inicial –en cursos de licenciatura en matemáticas–, formación continuada y en grupos de colaboración.

Las formas en que dicha formación puede ocurrir son muchas. Barbosa (2004b), por ejemplo, sugiere que el (futuro) profesor debe experimentar la modelación como estudiante, realizando él mismo la actividad de modelación, y como maestro, guiando a sus

estudiantes para llevar a cabo la actividad de modelación. Almeida y Dias (2007, p. 266) sostienen que es importante que los cursos de formación de profesores proporcionen oportunidades de “‘aprender’ sobre la modelación matemática; ‘aprender’ por medio de la modelación matemática y ‘enseñar’ usando modelos matemáticos.” (Énfasis de los autores).

Sin importar el espacio en el que ocurra esta formación, o cómo sucede, una unanimidad entre los trabajos que tienen que ver con la modelación en la formación de profesores, es que existe una especie de conflicto entre la buena receptividad de la modelación por parte de los profesores, y los relatos de tensiones, miedos, obstáculos, etc. experimentados por ellos antes de desarrollar las actividades de modelación. Este conflicto ha estado presente desde hace tiempo en la bibliografía del campo, como puede observarse a continuación.

Hace 25 años, en uno de los grandes clásicos de la modelación matemática en la educación, Blum y Niss (1991) presentan varios argumentos utilizados por los profesores de matemáticas e investigadores, para la inclusión de la modelación en las clases de matemáticas: el desarrollo de la creatividad de los estudiantes, la preparación de los estudiantes para vivir en la sociedad de forma más activa, la utilización de las matemáticas en la resolución de problemas cotidianos y, sobre todo, el apoyo a los estudiantes en el aprendizaje de conceptos y técnicas matemáticas. Los autores afirman, sin embargo, que, a pesar de los buenos argumentos en su defensa, la resolución de problemas, la modelación y sus aplicaciones “no juega un papel tan importante en la corriente principal de la educación matemática en la escuela y la universidad, como nos gustaría.” (p. 53). Entre los obstáculos presentados por Blum y Niss (1991) están el miedo de que los profesores no tengan tiempo suficiente para cumplir con la programación curricular de las matemáticas debido a la inclusión de las actividades de modelización; y la demanda de más trabajo de los profesores, porque tienen que lidiar con actividades más abiertas y requieren conocimientos no matemáticos, que no hicieron necesariamente parte de su formación. Klüber et al. (2017) van más allá y plantean que la modelación matemática es considerada en el salón de clases como “ataques” al paradigma sobre el cual los profesores, en general, se rigen.

Con la intención de presentar resultados de investigación empíricos relativos a la enseñanza y aprendizaje de la modelación, Blum (2011, p. 22-23) hizo una revisión de la literatura y señaló cinco elementos necesarios

para que los maestros traten adecuadamente con la modelación:

- conocimiento de espacios de tareas de modelación (incluidas demandas cognitivas de tareas y preferencias propias por soluciones especiales).
- Conocimiento de un amplio espectro de tareas, también para propósitos de evaluación.
- Habilidad para diagnosticar las dificultades de los estudiantes durante los procesos de modelación.
- Conocimiento de un amplio espectro de modos de intervención y capacidad para utilizar intervenciones apropiadas.
- Creencias apropiadas.

El autor afirma, sin embargo, que la forma como las competencias de los profesores pueden contribuir a una enseñanza exitosa todavía es una pregunta de investigación abierta.

En los trabajos de Oliveira y Barbosa (2011), debido a la propia madurez de la investigación en el campo de la modelación en la educación, se centra la atención en los problemas específicos que enfrentan los maestros en relación con la modelación. Como un primer punto, señalamos que los autores ya no plantean discusiones en torno de obstáculos a

la aplicación de la modelación, sino en “los dilemas, las inseguridades e incertidumbres que los maestros han expresado en la aplicación de la modelación en clase” (p. 268). El objetivo de los autores es describir las situaciones de tensión experimentadas por los profesores en su primera experiencia con la modelación matemática. Ellos detectaron las siguientes condiciones de tensión: la participación de los estudiantes en la discusión del tema de la actividad de modelación, la planificación de actividades, la organización de los estudiantes en el desempeño de la actividad y la presentación de las respuestas de los estudiantes.

Ceolin y Caldeira (2015) tienen como objetivo describir las dificultades que los profesores recién titulados tienen al realizar actividades de modelación, incluso después de haber tenido un curso dedicado a ello en los programas que acaban de terminar. Los autores presentan las siguientes dificultades: inseguridad, formación insuficiente en la modelación, dificultades en la aplicación de la modelación gracias al enfoque tradicional y conservador hegemónico del sistema escolar y dificultad en provocar la participación de los estudiantes.

Estos son algunos ejemplos de cómo la investigación viene tratando, desde hace algún tiempo, los problemas vivenciados por los profesores para incorporar las actividades de modelación en sus clases. Todos estos trabajos hacen alguna recomendación para mejorar la formación de los profesores en relación con la modelación en la educación matemática.

El profesor Wilson, personaje principal de nuestro estudio, no tenía tales tensiones, dificultades u obstáculos señalados por Ceolin y Caldeira (2015), en relación con la modelación, incluso porque él mismo no la conocía. Sin embargo, tuvo inquietudes y problemáticas en su práctica docente que lo llevaron a escuchar con simpatía la invitación hecha por Francisco. Por lo tanto, su primer contacto con la modelación sucedió con aquella invitación para realizar una actividad de modelación en colaboración con un profesor más experimentado, lo que puede haber dado lugar a que éste profesor vivenciara las dificultades de una manera diferente, transformándolas, quizá, en potencialidades para su propia formación.

Antes de describir la primera experiencia de Wilson con la modelación matemática, consideramos pertinente y necesario presentar el abordaje metodológico utilizado en la investigación aquí descrita, lo que será hecho en la sección siguiente.

Abordaje metodológico

Los profesores Wilson y Francisco plantearon que la investigación debería incorporar aspectos socio políticos de la educación matemática retomados por Vithal (2000), Skovsmose y Borba (2004) y Valero (2012). De acuerdo con Vithal (2000), una investigación en el aula de matemáticas que recoja estas ideas debe ir más allá de una interpretación de lo que sucede y propender por *el cambio*, pues la investigación debe, por principio, revertir el statu quo en una dirección que la comunidad consensua. Dicho cambio lo interpretan, los profesores Wilson y Francisco (CAMELO; PERILLA; MANCERA, 2016), al aceptar la existencia de tres tipos de situaciones que Vithal (2000) denomina corriente (SC), imaginada (SI) y dispuesta (SD). La SC fue aquella situación que se presentaba en el contexto de trabajo antes de desarrollar la investigación. La SI fue una situación ideal, pensada y consensuada por los integrantes de la comunidad que estaban participando en la investigación; ésta situación es lo que idealmente ellos esperaban que sucediera, en palabras de Skovsmose (2015), “es lo que no es pero pudiera ser” (p. 72). La SD fue una situación real, reorganizada, creada y constituida en consenso por los estudiantes, Wilson y Francisco, es lo que se desarrolló a partir de los recursos disponibles en la SC, con miras a estudiar y analizar la SI.

Los datos que se analizaron fueron producidos a partir de un análisis a las grabaciones de video de las sesiones desarrolladas en la SD y anotaciones de campo de

encuentros que se dieron entre Wilson y Francisco antes, durante y después de la creación del ambiente de modelación. Allí se evidenció que Wilson daba muestras de un cambio en su quehacer docente, por lo que se decidió realizarle una entre-*vista*, en el sentido planteado por Kvale (1996), focalizada en este aspecto, tiempo después de finalizado el ambiente de aula.

Algunos ambientes creados

Los ambientes creados fueron: a) *Empacando ando*, donde se trabajó sobre el problema clásico de encontrar la variación del volumen de una caja sin tapa a partir de sus dimensiones; para ello, los profesores formularon el problema y los estudiantes tuvieron que enfrentarlo, buscar informaciones y construir soluciones para ser presentadas y discutidas con el grupo en general y; b) *Telefonía móvil*, donde se buscó reflexionar sobre un interés de los estudiantes en comprender algunas características de tal modelo de telefonía en Colombia, presentando la actividad a partir de un tema no matemático de la realidad, en el que los jóvenes plantearon problemas específicos, con la ayuda de los profesores, siendo su responsabilidad la búsqueda de información y la resolución del problema. A continuación, describimos y analizamos tales ambientes.

Ambiente: "Empacando, ando"

La materialización del trabajo entre Wilson y Francisco comenzó a desarrollarse, como ya lo mencionamos en la introducción, cuando el primero de ellos, ante la invitación de desarrollar un ambiente de modelación y gracias a la relación de amistad que le permite actuar desinhibidamente, plantea el interrogante: ¿y cómo es que son los ambientes de modelación matemática en el aula? abriendo posibilidades para una propuesta en doble vía. Por una parte, leer, estudiar y reflexionar algunos documentos que permitieran ir perfilando respuestas al cuestionamiento ya señalado y, por otra, desarrollar un ambiente de aula con uno de los grupos donde Wilson se desempeña como profesor de matemáticas.

Fue así como se propusieron para la discusión y reflexión los documentos de Araújo (2009), Barbosa (2004a) y Burak (1994, 2004 y 2010), con el fin de establecer y consensuar sus entendimientos sobre el interrogante mencionado. Al mismo tiempo, ellos decidieron crear un ambiente de modelación, que partió de una propuesta de Wilson de trabajar con una simulación que él construyó con el software Geogebra, donde se da cuenta de un problema clásico que se encuentra en los libros de cálculo diferencial: el problema de construir una caja sin tapa a partir de una lámina de cartón rectangular de dimensiones dadas, para observar y analizar cómo varía el volumen a partir de la altura de la misma. Esa discusión inicial puede ser observada en un fragmento de sus diálogos, como presentamos a continuación.

Wilson: Francisco, podemos usar una simulación que yo hice con el software Geogebra y plantear a los chicos que exploren cuáles son las variables independientes y dependientes que hay allí. Espéreme la busco y le muestro.

Francisco: Déjeme ver de qué se trata.

[Wilson busca entre los archivos del servidor del salón de clases y abre uno en donde se observa la simulación del volumen de una caja sin tapa en función de la altura. A la izquierda de la pantalla del computador, puede apreciarse los datos numéricos].

Wilson: La idea sería que al mover este punto [arrastrando el extremo superior de una de las aristas de la caja] los chicos vean cómo el volumen de la caja varía. Vea que si la altura es muy

pequeña, la caja queda aplastada y el volumen va tendiendo a cero.

Francisco: ¿Sucede lo mismo si la altura es muy grande?

Wilson: Si. El volumen va creciendo, a medida que la altura crece, pero en un punto, esa relación cambia y el volumen comienza a decrecer hasta llegar a cero.

Cabe señalar que la cercanía entre estos dos profesores nos permite afirmar que Wilson, en la búsqueda de elementos y recursos de cuño teórico y metodológico que le permitan presentar propuestas para el aprendizaje que sean significativas, ha considerado clave, desde hace varios años (alrededor de 10), utilizar las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC's) como una herramienta que puede facilitar la construcción del conocimiento matemático, a la vez que ella podría permitir la interacción y la participación activa de los estudiantes. Es por ello que ha aprovechado algunos programas de formación permanente en esta área que algunas universidades colombianas, junto con el Ministerio de Educación Nacional (MEN), han ofrecido. Además de eso, él busca que, en su salón de clase, se disponga de tecnologías informáticas computacionales, tal y como lo podemos observar en el siguiente fragmento de la entrevista:

Francisco: [...] ¿Y siguen usando la página web, [...] mil aulas para apoyar las actividades de clase?

Wilson: Si, ... seguimos en mil aulas, siguen las evaluaciones virtuales ahí, [...] de pronto algún material les subo o les pongo para que trabajen.

Francisco: ¿Y el salón, es el mismo o eso ya tiene video beam, eso cómo se ha venido...?

Wilson: El salón, [...] ¿cuál conocía usted?

Francisco: El de la esquina, el que tenía tablero digital ...

Wilson: Ya voy por el tercer salón, me pasaron a otro salón y

Francisco: El de enseguida, el que se nos cayó la puerta

Wilson: Terminé con tablero digital y las tablets y ahora estoy en otro, tengo las tablets y un videobeam interactivo.

....

Francisco: ¿Y lo pasaron a otro?

Wilson: Y en ese otro salón ya tengo tablets y un videobeam interactivo que es como un tablero digital, o sea el videobeam se proyecta a la pared y tengo un apuntador en la mano donde manejo el computador desde ahí... eso ya es otra tecnología que llegó.

Bajo este panorama, la invitación que hace Francisco para explorar la modelación junto con la sensibilidad de Wilson por las TIC's, resultan transformándose en una oportunidad de relacionar las TIC's con la modelación, pues éstas podrían resultar ser una gran herramienta didáctica para la representación de simulaciones de modelos. Además ella podría generar escenarios, como lo podemos observar en el siguiente fragmento de la entrevista, donde la participación, la comunicación y la interacción entre los estudiantes tuviera lugar, dejando entrever una idea inicial de la rica relación que puede darse entre las TIC's y la modelación matemática (ARAÚJO, 2002; MALHEIROS; FRANCHI, 2013), como una versión interactiva de los modelos donde es posible controlar y observar variables gracias a la construcción del modelo por medio de un software interactivo.

Wilson: Volviendo a la participación en clase [refiriéndose a las clases

dónde se desarrolló el ambiente de modelación matemática], lo hacen con naturalidad, ya no se preocupan por el “oso” o por el estrés, hasta pasan al tablero y todo, hasta me corrigen, que eso es otra, atreverse a decir no profe la embarró acá eso es un pecado [refiriéndose a una clase tradicional]

Francisco: Y al profe ...

Wilson: Y al profe, y ya; y corrigen y de todo; y pataniamos, que se me trabó el computador trabajando con el Geogebra y se burlan, que le quedó grande, que no sé qué. ... Dentro de eso la clase ya es otro cuento.

Francisco: O sea ha cambiado más desde lo metodológico, digamos ..., desde la interacción en el día a día.

Wilson: Si claro, ... bueno de hecho yo ya venía con un trabajo de tecnología. Pero digamos que el trabajo con tecnología también cambió; sí, ya no es el fin ya es la herramienta. La metodología es otro cuento ahorita, muchísima discusión con los muchachos.

Francisco, que conoce a Wilson y a la literatura sobre modelación, sacó provecho del interés de Wilson y de lo que dice la literatura para acercar al profesor a la modelación considerando dos aspectos a saber: a) que el profesor reconoce que gracias a la actividad de modelación sus clases con las TIC's también cambiaron y, b) que la actividad, antes de ser modelada en el software, debería contemplar la manipulación de material y la posibilidad de ser representada de diversas maneras, para finalmente pensar la simulación, como se observa en la siguiente transcripción. Es de resaltar que tanto Wilson como Francisco van proponiendo consideraciones sobre el ambiente a desarrollar, de manera horizontal y apoyándose mutuamente.

Francisco: Wilson. ¿Qué le parece si antes de proponerles a explorar la simulación, les planteamos desarrollar el ejercicio usando material concreto? Les damos unas hojitas de papel de ese con el que se hace origami y les pedimos que construyan cajas de diferentes tamaños.

Wilson: ¿...y con esa parte del trabajo que podríamos ganar?

Francisco: Veo varias cosas. La que más me parece interesante es que los chicos podrán percibir que la simulación realmente es un modelo que representa una infinidad de cajas que se pueden construir en el mundo real. Con cada papel pueden construir una sola caja cada vez. Así, el modelo puede verse como algo potente que ayuda a la toma de decisiones.

Wilson: Sabe que sí. Tenemos que buscar un problema para poder proponerlo.

Con esta consideración, Francisco va, poco a poco, insertando elementos de la modelación en el planteamiento inicial de Wilson, que estaba enfocado en las TICs. Al aceptarlo, Wilson permitió plantear a la modelación, por una parte, como una metodología para construir modelos en el salón de clase, en sentido que hemos señalado de Villa (2007), y por otra, sutilmente, se va introduciendo a la modelación como una herramienta que permitirá estructurar la enseñanza y el aprendizaje, tal y como lo señala Burak (1994, 2004 y 2010). En otras palabras, gracias a este movimiento que se gestó y a la disposición mostrada por Wilson para permitirse reflexionar alrededor de los cuestionamientos que se le venían presentando en su práctica pedagógica, él comenzó a apropiarse de la literatura sobre modelación en la educación matemática y a considerar a la modelación como un ambiente en donde los estudiantes podrían desarrollar habilidades para resolver problemas con las matemáticas, circunstancia que se observa en la siguiente transcripción de la entrevista:

Francisco: Digamos que, ... en el 2014, principios del 2015, usted venía haciendo unas clases de una manera. Yo siempre he resaltado [en otros espacios de discusión] que usted no es un profesor tradicional. Es un profesor que intenta incorporar la tecnología en las clases. Por ejemplo, tenía sus computadores, ahora las tablets, o después (no sé si ahora tenga los computadores), pero ha intentado hacer cosas con geometría dinámica. Ha intentado que la clase ya no sea tablero y estudiantes escuchando, sino que esas dinámicas han venido cambiando. Aparece una persona, [que le dice] venga hagamos una cosa un poco diferente y esa cosa un poco diferente parece que empieza a trastocar lo que usted hace después; o sea empieza a darle vueltas en la cabeza otras cosas. Ahorita dice, ya no, ya no, no es que no importen los contenidos, sino que sólo pensar en los contenidos empieza a ser problemático, debería considerarse otras cosas.

Wilson: Si claro, ya uno no, [...] no presenta el contenido por presentarlo, que es de pronto lo que se venía haciendo antes. O sea, con la tecnología y con todo lo que yo hacía, pero igual era cumplir con un contenido, que ellos lo conocieran, ... yo decía yo no quiero sacar matemáticos, quiero es que intuyan algunos conceptos, que sepan cómo se hacen, pero no que tengan la parte formal ni nada de eso, sino que los conozcan; pero ahorita viene otra pregunta ¿y eso para qué, para qué les sirve? Esa pregunta es ... listo yo le doy ... derivadas

Francisco: ¿Para qué aprenden derivadas?

Wilson: ¿para qué? O sea ¿en dónde la debe aplicar este pelado? y entonces de pronto busco un problemita o busco algún caso donde la variación se dé. Por ejemplo, lo de la caja que hicimos.

Francisco: Ah ... sí me había dicho que había repetido lo de la vez pasada

Wilson: Repetí lo de la caja para mirar lo de la variación la derivada y todo esto ... y de alguna manera para ellos fue muy fácil ...

Al decidir que debían proponer un problema, Francisco y Wilson le presentaron al grupo una situación que simula una entrevista de trabajo, en la que cada uno de los estudiantes debía presentar una serie de pruebas para ser “contratado” por la empresa “*empacando ando*”. Empresa ficticia, cuyo fin era transportar artículos, por lo que deberían embalarlos cuidadosamente. Dicha idea surge inicialmente de Francisco, quien aprovecha, como ya lo señalamos, la simulación realizada por Wilson en el software Geogebra y quien ve la oportunidad de presentarle un panorama diferente. En la primera prueba de la entrevista de trabajo, cada estudiante debía construir, en el menor tiempo posible, una caja de dimensiones dadas (cada uno de los estudiantes recibió dimensiones diferentes) a partir de una lámina de papel para origami (20 cm x 20 cm). Luego, debían agruparse de a tres o cuatro integrantes, para conformar un grupo, y definir un procedimiento para construir una caja sin tapa a partir de la lámina de papel. Un segundo ejercicio grupal consistió en construir una caja de volumen dado a partir de una lámina de papel con las mismas dimensiones. Al final, cada grupo debía presentar a los demás sus propuestas de trabajo y los profesores definirían quién sería contratado por la empresa. La idea que conjuntamente fueron creando Wilson y Francisco era que, en tres sesiones, los estudiantes propusieran un modelo matemático para construir una caja sin tapa de volumen dado a partir de una lámina cuadrada de papel de 20 cm x 20 cm, para caracterizar qué variables podrían ser dependientes y cuáles independientes.

En cuanto a la actuación en clase, retomaron las ideas de Barbosa (2004a) para

quien las situaciones en ambientes de modelación matemática pueden ser definidas de tres formas diferenciadas, a las que denomina casos de modelación, a saber: caso 1: el profesor propone a los estudiantes sobre qué investigar, delimitando el problema claramente para que los estudiantes lo aborden y planteen soluciones; caso 2: el profesor coloca un marco general en el que los estudiantes pueden decidir sobre qué y cómo investigar y; el caso 3: los estudiantes proponen sobre qué investigar y el profesor los acompaña durante todo el proceso. Siendo el ambiente “empacando ando” una situación más parecida con las descritas en el caso 1.

Bajo la premisa de poder dar buena cuenta del proceso desarrollado al interior de los subgrupos, los profesores, junto con el grupo de trabajo, decidieron organizar socializaciones donde cada subgrupo presentó los procedimientos seguidos. Además, se posibilitó vislumbrar diversos caminos para proponer un modelo matemático, usando algunas funciones matemáticas específicas, que permitiera la construcción de una caja.

Finalmente queremos señalar que reflexiones sobre los efectos del modelaje matemático, así como del proceso educativo en sí mismo, fue posible, para este ambiente, gracias a una intervención final del profesor Wilson, quien retomó las propuestas presentadas por los estudiantes para reflexionar acerca de las diferencias y similitudes de las mismas. Planteando además una simulación que permitió a los estudiantes comprender que todos los modelos presentados representan la misma situación.

Ambiente: Telefonía móvil

En un segundo momento, los profesores Wilson y Francisco, crearon colectivamente otro ambiente que se desarrolló en cinco sesiones (CAMELO; PERILLA; MANCERA, 2016). A diferencia del anterior, y producto de las reflexiones sobre los documentos que estudiaron, en este ambiente decidieron poner en práctica otras consideraciones sobre la modelación que tienen que ver con la perspectiva socio crítica planteada por Barbosa (2003; 2004a) y Araújo (2009). En particular retomaron, por un lado, que las situaciones deben ser tomadas del contexto socialmente relevante de los estudiantes como problemas no matemáticos del día a día, y por otro, decidieron trabajar con el caso 2, proponiendo un marco general en el que los estudiantes pudieran explorar posibilidades para desarrollar una investigación que les permitiera plantear y entender, basados en ideas matemáticas, alguna problemática sensible a sus percepciones. Esto último, teniendo en mente que el profesor Wilson estaba explorando sus primeras experiencias en el desarrollo de ambientes de modelación matemática.

Wilson: Francisco, me parece prudente trabajar con el caso dos que plantea Barbosa, pues el anterior ambiente que desarrollamos se parece mucho al caso uno y el caso tres es amplísimo y se requiere de un poco de experiencia. ¿le parece?

Francisco: Si Wilson. La idea sería tratar de plantearles algo que les permita moverse en un marco general y que ellos definan, en ese marco, problemáticas o preguntas que consideren relevantes.

Wilson: Buscar una problemática general que les llame la atención. Se me ocurren algunas. La que más me entusiasma se relaciona con un video que he visto en internet y explica por qué se planteó un cambio en el sistema de telefonía móvil en Colombia.

Francisco: Yo he visto el video Wilson. ¿usted cree que de allí podemos interesarlos?

Wilson: Si. Fíjese que ellos se comunican mucho con sus teléfonos celulares. Chatean y andan pendientes de las redes sociales. Seguro les interesará saber cómo funciona el cobro de la factura y si es posible bajar el

pago que realizan mensualmente.

Por esta razón, la idea central del ambiente giró en torno al sistema de telefonía móvil colombiano, pues los profesores consideraron que era un asunto cotidianamente discutido en el colegio:

podría interesar a los estudiantes por dos motivos: i) los y las jóvenes hacen uso de manera permanente de esta herramienta tecnológica para comunicarse a través del chat y las redes sociales y ii) recientemente se promulgó una ley que pretende reducir los costos tanto de los teléfonos móviles, como del servicio prestado por llamadas y datos. (CAMELO; PERILLA; MANCERA, 2016, p. 76).

La actuación de Wilson, en la elección de la temática central del ambiente, resultó clave, pues se consideró su conocimiento acerca de la cultura y del contexto socialmente relevante de los estudiantes, ya que, consideramos que dichas referencias, en palabras de Skovsmose (2000), sirven como base para que los estudiantes puedan construir los significados de los conceptos matemáticos y de las actividades. Es importante resaltar que las situaciones socialmente relevantes pueden entenderse como “escenarios con referencias cercanas a la vida social, política y económica de los estudiantes y a los procesos históricos que dan significado a estos fenómenos” (CAMELO et al., 2013, p. 123).

Teniendo en cuenta el marco general de la telefonía móvil en Colombia, los estudiantes se organizaron en grupos y reflexionaron sobre posibles problemáticas a estudiar. Tanto Wilson y Francisco, como los integrantes de los grupos, deberían aportar al establecimiento de las problemáticas a estudiar, planteando caminos y fuentes de información para la elaboración de un marco conceptual para abordarlas. Las problemáticas elegidas fueron: dificultades en la conexión o “llamadas caídas”; tiempo que se invierte usando el celular y la reposición; robo de los celulares; duración de las baterías; daños en la salud causados por el uso del celular y costo de los teléfonos móviles en Colombia y en el exterior. Con esta decisión los profesores consiguieron estimular la discusión con los grupos y entre los grupos, enfatizando en: cómo con las matemáticas se podría identificar una comprensión crítica de las problemáticas estudiadas, las implicaciones sociales de los diferentes aspectos seleccionados, el papel de cada uno de ellos en la sociedad e identificar con las matemáticas otras formas de percibir el contexto en el que viven y conviven los estudiantes.

Para recoger lo anterior, los profesores partieron por plantear, además, basados en los documentos leídos de Burak (2004; 2010), que el aprendizaje de las matemáticas no debe restringirse a reglas y heurísticas que puedan aplicarse de forma instructiva, donde los estudiantes intenten encontrar las soluciones, como tradicionalmente se ha considerado en las aulas colombianas, hecho que podría identificarse con la idea que Skovsmose (1994) denomina como paradigma del ejercicio. Tal circunstancia iba en la misma dirección del sentir de Wilson, pues desde hacía un gran tiempo venía considerando que al explicar, de forma racional y desde la lógica misma de la disciplina, teorías, reglas y procedimientos que han sido tradicionalmente compartidos por la comunidad de profesores de matemática, restringe la posibilidad de que sus estudiantes capturen la esencia del conocimiento. Al respecto, en la entrevista, Wilson claramente considera que se debe propender por actividades donde los estudiantes consideren otras formas de conocer y aprender.

Wilson: Los muchachos de ahora no aprenden igual que antes; ya ..., a nosotros nos ponían a repetir, y repita y repita, y vamos aprendiendo; estos

no [refiriéndose a sus estudiantes], con tanta información que les llega.

Francisco: Si, es que eso ya rompe la cosa. Nosotros no teníamos la posibilidad de ... eran las cuatro paredes [refiriéndose al salón de clases] y de ahí salirnos era más duro; aquí tienen un aparato que es como un tubo que les trae y les saca información, ... es otra cosa.

Wilson: Una cosa muy, muy sencilla, póngales un tema, digamos ... vamos a hablar de factorización y usted les explica. El pelado llega a su casa, no entiende abre youtube mira un tutorial y hay otra persona explicándole; entonces le explica bien o le explica mal y lo peor de todo es que le cree al de youtube, al profesor no, le cree más a ese ... o abre una página que le diga cómo hacerlo y le cree más a eso; sí, ... y entonces el papel del profe dónde está; ...

y de pronto un profesor tradicional, el pelado llega con una forma diferente de factorizar, que la aprendió de youtube y eso y el profesor lo va a regañar porque esa no es la forma.

Francisco: Aja. El profesor le insiste en que le está preguntando cuál fue la que él le explicó.

Wilson: Exactamente, y ... y así no debe ser. Creo que ahora el cuento debe ser más ... sí hay que darle unos temas porque tampoco los podemos mandar a solucionar un problema o a modelar una situación sin que ellos tengan un bagaje matemático. Deben tener algo, deben tener alguna herramienta con que ... con que atacarlo. Hay que presentarles los temas, pero hay que dejarles abierta la ventana para que ellos miren otras formas de verlo, de presentar ... de aprender ese tema, mire videos, paginas, o sea hay un mundo de cosas, ... tráigalas y las discutimos acá, y es más enseñarles a ellos a analizar la información que reciben y a obtener lo mejor.

Francisco: Sí, es una forma distinta y de pronto esa posibilidad de que hagan discusión entre ellos y discusión con el profesor les da herramientas para decir si lo que están leyendo está bien o no está bien ...

Desde nuestra perspectiva, consideramos que, con el ambiente desarrollado, los profesores buscaron conjuntamente ir más allá de los planteamientos dados en documentos oficiales colombianos, donde se propone que el aprendizaje de las matemáticas puede entenderse como "una actividad estructurante y organizadora, mediante la cual el conocimiento y las habilidades adquiridas se utilizan para descubrir regularidades, relaciones y estructuras desconocidas" (MEN, 1998, p. 32). Lo anterior porque se permitió plantear un enfoque dinámico de las matemáticas, donde los estudiantes tuvieran posibilidades de comprender, representar y problematizar. No obstante, cuando Wilson señala que "tampoco los podemos mandar a solucionar un problema o a modelar una situación sin que ellos tengan un bagaje matemático" es importante señalar que se evidencia que la modelación matemática es vista por Wilson, en ese momento, como aplicación de contenidos.

Por otra parte, si bien las matemáticas podrían ser interpretadas por los estudiantes como una actividad donde es posible que ellos se relacionen autónomamente con el conocimiento matemático, permitiéndole procesos de reflexión conducentes a la formalización de tal conocimiento, la experiencia, en un principio, muestra resistencia por parte de ellos a actividades diferentes a las tradicionales, hecho que puede corroborarse en la entrevista tal y como se muestra en el siguiente fragmento.

Wilson: [...] esos muchachos venían con algo muy tradicional y al

principio fue un choque para ellos durísimo, duro, duro, duro. O sea, llegar a enfrentarse a un profesor, “diferente”, en donde les ponía trabajo, los ponía a discutir frente a esos problemas; y ellos llegaban y... [decían] no queremos esto, [fue] un choque durísimo.

Francisco: La clase de matemáticas es de otra manera.

Wilson: Sí, la clase de matemáticas es el profesor, la evaluación, los ejercicios ... no, no queremos estos; esto es mucho trabajo decían. Pasó el primer periodo y el porcentaje de pérdida fue muy bajito y los pelados reaccionaron y dijeron: no espere, así estamos aprendiendo, y ya ha ido fluyendo...

A la luz de las consideraciones anteriores, una tensión que el profesor Wilson además afrontó, tiene que ver con la “zona de confort”. Pues, aunque él y Francisco propusieron ambientes de aula que invitaban a los estudiantes a asumir roles diferentes al tradicional. Estos, parecían querer continuar en un ambiente de aula que fuera más conocido y predecible para ellos (“un choque para ellos durísimo, duro, duro, duro”), en tanto no encontraban con facilidad posibilidades de afrontar la clase en medio de una discusión compartida de situaciones de la vida cotidiana. Circunstancias como éstas, muestran la riqueza (posibilidades y desafíos) de la relación de “colaboración” entre Wilson y Francisco y por ende la importancia de ahondar en el proceso de familiarización de Wilson con la modelación matemática. A continuación, en la discusión, reflexionaremos dicho proceso.

Discusión

Presentamos, en este artículo, una trayectoria del profesor de matemáticas a lo largo de su proceso de familiarización con la modelación matemática. El primer contacto del profesor Wilson con la modelación no se dio por medio de un curso de formación de profesores. Más que eso, la primera intención no era su formación relativa a la modelación, sino, la creación de un contexto para el desarrollo de la investigación del profesor Francisco. La necesidad de Francisco, sin embargo, ocasionó que algunas espigas se pegaran al “cuerpo” de Wilson y, de forma intencionada, se dio un interesante y colectivo proceso formación en modelación, algo que ha sido foco de varios estudios, como mostramos en la sección “Modelación en educación matemática y formación de profesores”.

Hubo, entonces, una confluencia de experiencias, necesidades y cuestionamientos, de ambas partes, que impulsó el proceso de familiarización del profesor Wilson con la modelación. De parte del profesor Francisco, además de la necesidad de la creación del contexto para realizar su investigación, había una experiencia práctica y el conocimiento de la literatura sobre modelación en la educación matemática. En cuanto al profesor Wilson, había cuestionamientos de prácticas tradicionales en educación matemática y la creencia en las tecnologías como una interesante alternativa para romper esa tradición. En común, ambos tenían una vasta experiencia como profesores de matemáticas y la decisión para enfrentar nuevos desafíos en sus prácticas.

La forma como se estableció ese trabajo entre los profesores llamó fuertemente nuestra atención como investigadores, pues tenemos conocimiento de las dificultades (CEOLIN; CALDEIRA, 2015) y tensiones (OLIVEIRA; BARBOSA, 2011) vivencias por los profesores en sus propias experiencias con modelación en educación matemática. La experiencia que relatamos aquí tuvo menos tensiones y dificultades que las que son relatadas en la literatura. Así, para nosotros, una característica del proceso de familiarización del profesor Wilson con la modelación es una colaboración que se estableció entre él y Francisco, enraizada en la cercanía y amistad que tienen desde tiempo atrás. Fiorentini

(2012) presenta algunos aspectos que caracterizan el trabajo colaborativo en situaciones de formación de profesores: i) voluntariedad, identidad y espontaneidad; ii) liderazgo compartido y corresponsabilidad; y iii) apoyo, respeto mutuo y reciprocidad de aprendizaje.

El trabajo entre los profesores fue voluntario y espontáneo, aunque hubiese sido provocado por la necesidad del profesor Francisco. Fiorentini (2012, p. 59) afirma que, cuando “un investigador universitario [...] intenta captar profesores de escuelas para que abran sus salones de clases para la investigación académica”, es más común que suceda una cooperación entre ellos. Según este mismo autor, en una actividad donde existe cooperación, los profesores se ayudan unos con otros (es decir “co-operan”) realizando tareas donde los propósitos generalmente no son el resultado de la negociación, pudiendo encontrarse relaciones no horizontales y jerárquicas. No fue esta la relación establecida entre Wilson y Francisco, pues “trabajaron conjuntamente (co-laboraron) y se apoyaron mutuamente para alcanzar objetivos comunes negociados”, aproximándose más a un trabajo colaborativo en el cual “las relaciones [...] tienden a ser no jerárquicas, habiendo liderazgo compartida y “corresponsabilidad” en la conducción de las acciones” (ídem, p. 56, énfasis en el original). La colaboración entre Francisco y Wilson pudo ser fruto de las experiencias de trabajo compartidas previamente entre ellos, basadas en el apoyo y respeto mutuos y en la amistad. En este sentido cada uno pone en juego sus conocimientos particulares sobre la práctica y sobre la investigación en el campo de educación matemática para conseguir un fin común, dando origen a una reciprocidad de aprendizaje.

Para caracterizar la práctica pedagógica de modelación, propiamente dicha, creada por los profesores Wilson y Francisco, nosotros nos apoyamos en la descripción de los ambientes “empacando, ando” y telefonía móvil.

Como ya hemos afirmado, el primero de los ambientes se aproxima a lo que Barbosa (2004a) ha descrito como caso I de tareas de modelación. Sin embargo, muchos autores del campo de la modelación en educación matemática no clasificarían ese ambiente como modelación, ya que es una situación ficticia que fue creada para que, en ella, un problema fuese resuelto por medio de la matemática. El ambiente y el problema eran muy parecidos con aquellos que podemos encontrar en libros didácticos de matemáticas. No obstante, queremos resaltar que en nuestro análisis, la creación del ambiente estuvo fuertemente influenciado por la experiencia y creencias del profesor Wilson, quien ya tenía algunos indicios de la modelación, traídos por el profesor Francisco a partir de su conocimiento de la literatura.

El segundo ambiente creado por Wilson y Francisco era un típico caso 2 (BARBOSA, 2004a) de modelación, en el que se propuso a los estudiantes un problema con referencia a la realidad, quienes debían plantear preguntas específicas, obtener datos, etc. Más que eso, como el tema propuesto por los profesores era parte de la vida cotidiana de los estudiantes, existía la posibilidad de dar lugar a un ambiente de modelación guiado por las orientaciones de la educación matemática crítica (Araújo, 2009). Debemos resaltar que hay una fuerte influencia, en la creación de este ambiente, tanto de la experiencia y el conocimiento del Profesor Francisco, como de sus intenciones en el proyecto de tesis que estaba desarrollando. Lo anterior sólo podría ocurrir debido a la confianza mutua incrementada entre los profesores y al aumento de la seguridad adquirida por Wilson gracias al desarrollo del primer ambiente.

En nuestro análisis, una segunda característica del proceso de familiarización del Profesor Wilson con la modelación es que ella sucedió de forma gradual, en el que los elementos de modelación a lo largo de las líneas de la educación matemática (y, a veces, en la educación matemática crítica) se van incorporando poco a poco en los ambientes. Este proceso es muy similar con el que Almeida, Silva y Vertuan (2012) proponen para familiarizar a los estudiantes con actividades de modelación matemática. Estos autores afirman que hay

una gran brecha entre la práctica tradicional de la educación matemática, con clases expositivas seguidas de ejercicios para actividades de modelación, donde se realizan investigaciones abiertas de situaciones con referencia a la realidad. Ellos ponderan, por tanto, que estas “actividades deben configurarse como una “invitación” que se va afirmando y confirmando en el curso de la experiencia” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 26, énfasis en el original). Nos parece, pues, que esta recomendación también es relevante para la formación de profesores.

Consideraciones finales

Comenzamos este artículo contando la historia del ingeniero George de Mestral, que inventó el velcro al observar una planta en un paseo sin mayores pretensiones científicas o académicas a través de los Alpes suizos. En términos generales, algo similar pasó con el profesor Francisco mientras “caminaba” por los datos de su investigación doctoral. Aunque el objetivo de esta investigación recae más sobre los estudiantes, Francisco percibió que algo diferente estaba ocurriendo con Wilson y, al igual que el ingeniero de Mestral, decidió seguir su intuición de investigador y estudiar más detenidamente lo que estaba ocurriendo con el profesor Wilson.

Para tal estudio, Francisco invitó a dos investigadores (los otros dos autores de este artículo) y juntos decidimos trabajar con los datos del estudio y planteamos que necesitamos llevar a cabo una entrevista con el Profesor Wilson, ya que él no era el foco de la investigación inicial y se necesita más información sobre el proceso experimentado por este profesor. También fue necesario llevar a cabo una búsqueda en la literatura sobre la formación del profesorado en relación con la modelación matemática, para ayudarnos a entender el proceso y para extraer importantes contribuciones a este campo de estudio.

A partir del análisis de datos, concluimos que el proceso de familiarización del Profesor Wilson con la modelación matemática se produjo gradualmente, a través de la planificación y la realización de ambientes de modelación que fueron incorporando, poco a poco, las características de la modelación de acuerdo con la educación matemática (crítica). Este proceso se llevó a cabo de manera imperceptible y sin problemas, sin muchas dificultades o tensiones, que, en nuestro análisis, se debió a la colaboración con que los profesores Francisco y Wilson planearon y desarrollaron los ambientes de modelación matemática.

Por último, tales conclusiones nos remiten a la idea de modelos (o sistemas de interpretación) de enseñanza propuesto por Doerr y Lesh (2011, p. 265). Según estos autores

Una hipótesis clave desde una perspectiva de modelación sobre el desarrollo del conocimiento de los maestros es que ellos deben tener la oportunidad de desarrollar sus propios modelos (o sistemas de interpretación) [de tareas de enseñanza]. Estas oportunidades necesitan ser organizadas en torno a experiencias que involucren a los maestros en la expresión de sus maneras de pensar actuales, tales como hacer explícitas las rutinas implícitas de la práctica o proporcionar razones para estrategias de instrucción particular.

Entendemos que la experiencia vivenciada por el Profesor Wilson fue una de esas oportunidades para el desarrollo, de forma gradual y en colaboración, de su propio modelo de actividades de modelación matemática en sus clases. Evidencia de lo anterior lo encontramos no solo en la disposición y responsabilidad con que Wilson asumió la relación de “colaboración” que se gestó con el profesor Francisco, sino también podemos encontrarla en su coautoría en publicaciones y participación en eventos académicos a nivel

nacional e internacional, lo cual no es común en un proyecto de formación de profesores.

No sabemos si el profesor Wilson continuará el desarrollo de este modelo o cómo va a evolucionar. Sin embargo, el relato y análisis de esta experiencia nos hace creer que un paso importante en la formación de profesores, en relación con la modelación matemática, es la creación de un repertorio de relatos similares a este, en la que los profesores, de cualquier escuela, pueden tener acceso a historias que podrían haber sido vividas por cualquiera de ellos.

Agradecimientos

Queremos agradecer a Wilson Perilla por permitirnos relatar su experiencia, al colegio y a los niños con quienes se desarrollaron los ambientes de aula aquí mencionados. A Claudia Salazar y Tiago Klüber por su lectura y sugerencias a una versión previa a este documento, aunque la responsabilidad de lo que aquí se plantea es enteramente de nosotros como autores.

Notas

⁴Primer autor de este artículo y, para la época en que se escribió, estudiante de Doctorado, orientado por la profesora Jussara de Loiola Araújo, segunda autora de este artículo.

⁵ En la época en que se escribió este artículo laboraba en un colegio público de la ciudad de Bogotá (Colombia).

⁶ El sistema educativo colombiano contempla cinco etapas a saber: inicial (hasta los dos años de edad), preescolar (tres grados), básica (nueve grados), media (dos grados) y superior. Undécimo se corresponde con el segundo grado de la educación media.

⁷ Colombia está dividida administrativa y políticamente en 32 departamentos y un Distrito Capital, siendo Antioquia uno de tales departamentos.

⁸ La International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications (ICTMA) es un grupo de estudios afiliado al ICMI desde 2003. Es responsable por la organización de las International Conferences on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications (ICTMA) que tienen lugar bianualmente desde 1983. Más informaciones sobre los ICTMAs (grupo y conferencias) están disponibles en <http://www.ictma15.edu.au/>

⁹ La Conferencia Nacional sobre Modelagem en la Educación Matemática (CNMEM) es un congreso brasilero que reúne investigadores, profesores y otros interesados por la modelación en el campo de la educación matemática. Ella ocurre bianualmente desde 1999. En la página web de su última edición, puede encontrarse un resumen con detalles históricos de los congresos: http://www.ixcnmem.ufscar.br/wordpress/?page_id=37.

¹⁰ Traducción nuestra de "‘Aprender’ sobre a modelação matemática; ‘Aprender’ por meio da modelagem matemática e ‘ensinar’ usando modelos matemáticos." (ALMEIDA; DIAS, 2007, p. 266).

¹¹ Traducción nuestra de "‘still do not play as important a role in mainstream mathematics instruction at school and university as we would wish.’" (BLUM; NISS, 1991, p. 53).

¹² Traducción nuestra de: "for teachers to treat modelling adequately:

- knowledge of task spaces of modelling tasks (including cognitive demands of tasks and own preferences for special solutions).
- Knowledge of a broad spectrum of tasks, also for assessment purposes.
- Ability to diagnose students' difficulties during modelling processes.
- Knowledge of a broad spectrum of intervention modes and ability to use appropriate interventions.
- Appropriate beliefs". (BLUM, 2011, p. 22-23).

¹³ Traducción nuestra de "dilemas, inseguranças e incertezas que professores têm manifestado na implementação da modelagem nas aulas" (OLIVEIRA; BARBOSA, 2011, p. 268).

¹⁴ Traducción nuestra de: “é o que não é mais poderia ser” Skovsmose (2015, p. 72).

¹⁵ Los Programas de Formación Permanente de Docentes (PFPD) son una estrategia de formación, en la que los docentes del Distrito Capital desarrollan actividades de actualización académica, experiencias de innovación y trabajan elementos de investigación educativa, en el marco de las líneas de investigación que ofrecen las entidades autorizadas para ello. Los PFPD no conducen a título de posgrado.

¹⁶ Traducción nuestra de “um pesquisador universitário [...] tenta cooptar professores da escola a abrirem suas salas de aula para a pesquisa acadêmica” (FIORENTINI, 2012, p. 59).

¹⁷ Traducción nuestra de “trabalharam conjuntamente ('co-laboraram') e se apoiaram mutuamente, visando atingir objetivos comuns negociados”, [...] “as relações [...] tendem a ser não hierárquicas, havendo liderança compartilhada e 'co-responsabilidade' pela condução das ações.” (FIORENTINI, 2012, p. 56).

¹⁸ Traducción nuestra de “atividades devem se configurar como um 'convite' que vai se firmando e se confirmando no decorrer de experiências.” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 26).

¹⁹ Traducción nuestra de: “A key assumption from a modelling perspective on the development of teachers' knowledge is that teachers must be provided with opportunities to develop their own models (or systems of interpretation) [of tasks of teaching]. These opportunities need to be organized around experiences that engage teachers in expressing their current ways of thinking, such as making explicit the implicit routines of practice or providing rationales for particular instructional strategies.” Doerr y Lesh (2011, p. 265).

REFERENCIAS

ALMEIDA, L.; DIAS, M. Modelagem matemática em cursos de formação de professores. In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.). *Modelagem matemática na educação matemática brasileira: pesquisas e práticas educacionais*. Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2007, p. 253-268.

ALMEIDA, L.; SILVA, K.; VERTUAN, R. *Modelagem matemática na educação básica*. São Paulo: Editora Contexto, 2012.

ARAÚJO, J. *Cálculo, tecnologias e modelagem matemática: as discussões dos alunos*. 2002. 173f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro. 2002.

ARAÚJO, J. Modelling and the critical use of mathematics. In: HAINES, C. et al. (Orgs.). *Mathematical modelling: education, engineering and economics (ICTMA 12)*. Chichester: Horwood: Publishing Limited, 2007. p. 187-194.

ARAÚJO, J. Uma abordagem sócio-crítica da modelagem matemática: a perspectiva da educação matemática crítica. *ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, Florianópolis da revista, v. 2, n. 2, p. 55-68, Julho. 2009.

BARBOSA, J. Modelagem matemática e a perspectiva sócio-crítica. In: II SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2003, Santos. *Anais...* Santos: [s.n.], 2003. p. 1-13.

BARBOSA, J. Modelagem matemática: o que é? Por quê? Como? *Veritati*, Salvador, v. 4, p. 73-80, junho. 2004a.

BARBOSA, J. C. As relações dos professores com a modelagem matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. *Anais...* Recife: SBEM, 2004b. 1 CD-ROM.

BLUM, W.; NISS, M. Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects—State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational studies in mathematics*, Amsterdam, v. 22, n. 1, p. 37-68, fevereiro. 1991.

BLUM, W. Can modelling be taught and learnt? - Some answers from empirical research. In: KAISER, G. et al. (Eds.). *Trends in teaching and learning of mathematical modelling*.

Dordrecht: Springer, 2011. p. 15-30.

BURAK, D. Critérios norteadores para a adoção da modelagem matemática no ensino fundamental e secundário. *Revista Zetetiké*, Campinas, v. 2, n. 2, p. 46–60, março. 1994.

BURAK, D. Modelagem Matemática e a sala de aula. In: ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2004, Londrina. *Anais...* Londrina: Universidade Estadual de Londrina, 2004. p. 1–10.

BURAK, D. Modelagem Matemática sob um olhar de educação matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. *Modelagem na Educação Matemática*, Blumenau, v. 1, n. 1, p. 10–27. 2010.

CAMELO, F. et al. Reflexiones sobre las potencialidades y dificultades en la iniciación de prácticas socio críticas de modelación matemática. In: GARCÍA, G. et al. *Procesos de inclusión/exclusión, subjetividades en educación matemática*. Bogotá, Col.: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional, 2013. p. 115–145.

CAMELO, F. Political subjectivity from mathematical modelling. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION. TOPIC STUDY GROUP 21: MATHEMATICAL MODELLING, 13, 2016, Hamburgo, Germany. *Anais...* Hamburgo, Germany: Universidade de Hamburgo, 2016, p. 1-4.

CAMELO, F.; PERILLA, W.; MANCERA, G. Práticas de modelación matemática desde una perspectiva socio crítica con estudiantes de grado undécimo. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, San Juan de Pasto v. 9, n. 2, p. 67–84. 2016.

CEOLIM, A.; CALDEIRA, A. Dificuldades em relação ao uso da modelagem na sala de aula da educação básica. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: PLURALIDADES E DEBATES, 9, 2015, São Carlos. *Anais...* São Carlos: Universidade Federal de São Carlos, 2015, p. 01-15.

DOERR, H.; LESH, R. Models and modelling perspectives on teaching and learning mathematics in the twenty-first century. In: KAISER, G. et al. (Eds.). *Trends in teaching and learning of mathematical modelling*. Dordrecht: Springer, 2011. p. 247-268.

FIORENTINI, D. Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In: BORBA, M.; ARAÚJO, J. (Orgs.). *Pesquisa qualitativa em educação matemática*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2012. p. 53-85.

GARCÍA, G. et al. *Escenarios de aprendizaje de las matemáticas. Un estudio desde la perspectiva de la educación matemática crítica*. Bogotá, Col.: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional, 2009.

KAISER, G. et al. (Eds.). Trends in teaching and learning of mathematical modelling: ICTMA 14. Dordrecht: Springer, 2011.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, v. 38, n. 3, p. 302–310, junho. 2006.

KLÜBER, T. et al. Prática pedagógica em artigos sobre formação de professores em modelagem: Algumas considerações. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12, 2017, São Paulo. *Anais...* São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2017, p. 1 – 13.

KLÜBER, T. *Uma metacompreensão da modelagem matemática na educação matemática*. 2012. 396 f. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) – Centro de Ciências Físicas e Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012.

KVALE, S. *InterViews: an ntroduction to qualitative research interviewing*. California: SAGE Publications., 1996.

MALHEIROS, A.; FRANCHI, R. As tecnologias da informação e comunicação nas

produções sobre modelagem no GPIMEM. In: BORBA, M. C.; CHIARI, A. (Eds.) *Tecnologias Digitais e Educação Matemática*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013. p.175-193.

MANCERA, G.; CAMELO, F.; PERILLA, W. Modelación matemática desde la perspectiva socio crítica con estudiantes de secundaria: posibilidades y retos. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12, 2016, São Paulo. *Anais...* São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2016. p. 1-11.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. *Lineamientos curriculares. Área Matemáticas*. Bogotá: Cooperativa Editorial del Magisterio, 1998.

OLIVEIRA, A; BARBOSA, J. Modelagem matemática e situações de tensão na prática pedagógica dos professores. *Bolema – Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, v. 24, n. 38, pp. 265- 296, abril. 2011.

PARRA, M.; VILLA, J. Tendencias en investigación en modelación matemática en educación primaria. *Revista Colombiana de Matemática Educativa*, Bogotá, v. 1, n. 1, p. 235–240, Junho-dezembro. 2015.

SILVA, L.; OLIVEIRA, A. As discussões entre formador e professores no planejamento do ambiente de modelagem matemática. *Bolema – Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, v. 26, n. 43, p. 1071-1101, agosto. 2012.

SKOVSMOSE, O. *Towards a philosophy of critical mathematics education*. Dordrecht ; Boston: Kluwer Academic Publishers, 1994.

SKOVSMOSE, O. Escenarios de investigación. *Revista Ema*, Bogotá, v. 6, n. 1, p. 3–26, novembro. 2000.

SKOVSMOSE, O.; BORBA, M. Research methodology and critical mathematics education Issues of Power in Theory and Methodology. In: VALERO, P; ZEVENBERGEN, R. (Org.). *Researching the socio-political dimensions of mathematics education*. Springer US ed. New York: Springer, 2004. v. 35. p. 207–226.

SKOVSMOSE, O. Pesquisando o que não é, mas poderia ser. In: LOPES, C.; D´AMBROSIO, U. *Vertentes da Subversão na Produção Científica em Educação Matemática*. Campinas: Mercado das Letras, 2015. p. 63–90.

VALERO, P. La educación matemática como una red de prácticas sociales. In: VALERO, P; SKOVSMOSE, O. *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas*. Bogotá, Col.: una empresa docente, 2012, p. 299–325.

VILLA, J. La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno Lógicas*, Medellín, n. 19, p. 63–85, julho-dezembro. 2007.

VILLA, J. Presente y futuro de la investigación en modelación en educación matemática en Colombia. In: ENCUESTRO COLOMBIANO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA, 2009, San Juan de Pasto. *Anais...* San Juan de Pasto: Asociación Colombiana de Matemática Educativa, 2009. p. 1–8.

VILLA, J.; RUIZ, H. Modelación en educación matemática: una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos. *Revista virtual Universidad Católica del Norte*, Medellín, Colombia, v. 1, n. 27, p. 1-21, maio-agosto. 2009.

VITHAL, R. Re-searching mathematics education from a critical perspective. In: SECOND INTERNATIONAL MATHEMATICS EDUCATION AND SOCIETY CONFERENCE, 2000, Lisboa. *Anais...* Lisboa: Centro de Investigación em Educação da Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, 2000. p. 87–116.

Recebido em: 26/01/2017
Aprovado em: 07/02/2017