

UMA ANÁLISE DA EXPERIÊNCIA DA PERCEPÇÃO DE UM POLIEDRO VISUALIZADO EM CALEIDOSCÓPIO

Dra. Marli Regina do Santos

Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP

Dra. Rosemeire de Fátima Batistela

Universidade Estadual de Feira de Santana - UEFS

RESUMO: Neste artigo destacamos a experiência vivenciada na visualização de poliedros em caleidoscópios, atentando para os atos perceptivos que podem desencadear novos atos, análises e investigações na direção da construção do conhecimento, indicando possibilidades no âmbito da geometria e do seu ensino-aprendizagem. Atentamos, em uma perspectiva fenomenológica, para os atos que se efetivam e suas possibilidades de desdobramentos, articulando nossa discussão às ideias merleau-pontyanas quanto ao primado da percepção, que sustenta o encontro do ser no mundo, e às ideias husserlianas quanto à constituição do objeto para o sujeito.

Explicitamos termos próprios à fenomenologia, tais como percepção, intencionalidade, corpo-próprio, consciência, mundo-vida, trazendo situações que nos conduzam aos sentidos e significados no âmbito dessa perspectiva, permitindo o desvelar do encadeamento das ideias destacadas e das análises efetuadas. Adentramos por aspectos da geometria, apresentando conceitos e ideias envolvidos na visualização de poliedros em caleidoscópios, focando nossa atenção nas diferentes experiências de percepção e compreensão do poliedro, destacando as vivências intencionais, a constituição da totalidade do percebido e a comunicação entre sujeitos.

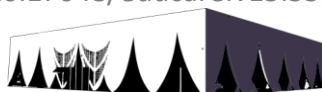
PALAVRAS-CHAVE: Fenomenologia; Poliedros de Arquimedes; Percepção.

AN ANALYSIS OF THE EXPERIENCE OF PERCEPTION OF A POLYHEDRON VISUALIZED IN KALEIDOSCOPE

ABSTRACT: In this paper we highlight the experience of visualizing polyhedra in kaleidoscopes, with attention for the acts that can trigger new acts, analyzes and investigations towards the construction of knowledge, indicating possibilities from geometry and its teaching-learning. In a phenomenological perspective, we examine the acts performed and their possibilities of unfolding by articulating our discussion with merleau-pontyan ideas about the primacy of perception, which sustains the meeting of being in the world, and husserlian ideas about the constitution of the object for the subject. We

explain phenomenological terms, such as perception, intentionality, self-body, consciousness, world-life, bringing situations that lead us to the senses and meanings within that perspective, for understanding of the ideas highlighted and the analyzes carried out. We introduce aspects of geometry, presenting concepts and ideas involved in the visualization of polyhedra in kaleidoscopes, focusing our attention on the different experiences of perception and understanding of the polyhedron, highlighting the intentional experiences, the constitution of the totality and the communication between subjects.

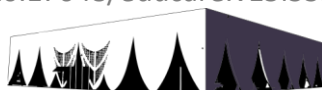
KEYWORDS: Phenomenology; Archimedes' Polyhedrons; Perception.



1 A PERCEPÇÃO DE UM OBJETO PELO VIÉS FENOMENOLÓGICO

Voltemos nossa atenção para uma experiência similar à que iremos enfocar em nossas análises posteriores, porém, como veremos, distinta dela, já que cada uma possui peculiaridades próprias. Atentemos para a percepção de um poliedro ao manipularmos uma figura obtida pela dobradura de sua planificação. Em um dado momento, apenas certos lados do poliedro estão visíveis ao nosso olhar, enquanto os outros, a maioria talvez, estão ausentes, não visíveis. Porém, intuímos que há algo a mais do que nos é dado pelo órgão da visão e “enxergamos” mais do que está no plano visual à nossa frente. Sabemos que a qualquer momento podemos girar ou caminhar ao redor do poliedro representado e, então, lados, faces e vértices ausentes desvelar-se-ão no campo de nossa visão. Ao nos movimentarmos, nosso órgão da visão não foca mais o que foi inicialmente dado, contudo, a percepção do objeto traz também as informações anteriores, em uma totalidade. Ainda que o dado visualmente de início se ausente do nosso campo de visão, ele é trazido no ato perceptivo ao visualizarmos outras perspectivas do poliedro. Podemos dizer que na vivência da percepção do poliedro *enxergamos* mais do que nos é dado pela imagem gerada em nossa retina.

Percepção é um primeiro termo que buscaremos elucidar ao leitor, considerando a importância do seu significado no âmbito da fenomenologia. O ato de perceber vai além do que nos é dado pelos órgãos do sentido: perceber não é apenas sentir sensações, como ao tatear uma superfície áspera ou ouvir um som harmonioso. “Perceber um objeto é intencioná-lo e torná-lo significativo, por meio de uma intuição originariamente doadora” (ALES BELLO, 2006). A percepção é um ato complexo diferente de uma mera sensação, ainda que ela esteja presente nos entrelaçamentos de sentidos. Ao ouvir um som, identificamos a melodia, reativamos sentimentos como gostar, odiar, acalmarmo-nos. Colocamos em perspectiva o som que foi dado na percepção. Percebemos o som enquanto presença. Mas o que é dado no ato de percepção não é o objeto som em si, pois na



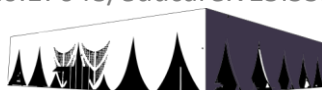
percepção não reproduzimos ou representamos o objeto em nossa “mente”, mas o sentimos na medida em que nos voltamos para ele.

Husserl (1980) destaca que “se a percepção fosse sempre o que pretende ser, isto é, a apresentação efetiva e genuína do próprio objeto, para cada objeto só haveria uma única percepção” (HUSSERL, 1980, p. 47). Se assim fosse, cada um e todos nós teríamos a idêntica percepção para um mesmo objeto. Porém, no ato de perceber ocorre uma doação de sentido que se dá no modo como intencionamos o objeto e no modo de o objeto se mostrar. A percepção é um ato que nos dá, de modo direto, sem intermediários, o focado pela intencionalidade do olhar (MERLEAU-PONTY, 1999).

Intencionalidade é outro termo que deve ser cuidadosamente explicitado pois, no âmbito da fenomenologia, não diz de algo propositalmente pensado, mas de um modo de ser no mundo. Trata-se do modo pelo qual o corpo-próprio se estende para o mundo, acolhendo e abarcando o sentido. Corpo-próprio é “entendido como Leib, corpo com movimento intencional” (BICUDO; KLUTH, 2010, p. 135).

A intencionalidade liga a direção de nosso olhar para onde quer que ela se volte. Podemos estar lendo, atentamente, um livro em uma sala, mas um ruído externo, de uma construção, por exemplo, faz com que nos voltemos para ele, tirando, ao menos temporariamente, o foco de nossa leitura. O ruído se destaca e nossa intencionalidade se direciona para ele, ainda que de modo fugidivo ou passageiro. Nossa intencionalidade se volta para. Outra pessoa poderia, no decorrer da leitura, sequer notar o ruído externo, ainda que o volume fosse alto o suficiente, e só se atentar para ele caso algum colega o avisasse.

Merleu-Ponty (1999) esclarece que o visto é sempre intencionado da perspectiva do corpo-próprio, de onde olhamos o mundo espacial e temporalmente localizados, portanto em perspectivas segundo as posições que assumimos frente ao visado. O corpo-próprio é o ponto-zero, “o objeto-zero, que é a condição de



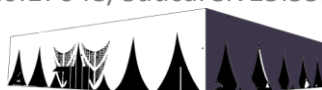
possibilidade de outros objetos” (HUSSERLIANA XIV, P. 540 apud BARCO, 2012, P. 6). É este corpo-próprio que estabelece uma interrelação entre nós mesmos e tudo mais ao nosso redor.

[...] assim como encontramos o mundo, também encontramos a nós mesmos, e nos encontramos em meio a este mundo. Uma posição preeminente nesse mundo, no mais, é própria a nós: nos encontramos como centros de referência para o resto do mundo; ele é o nosso ambiente. Os objetos do ambiente, com suas propriedades, mudanças e relações, são o que são em si mesmos, mas guardam uma posição relativa a nós; inicialmente, posição espaço-temporal, e então, também “espiritual”. (HUSSERL, 1907, apud BARCO, 2012, p. 02)

Nessa compreensão se transparece que a concepção husserliana de corporeidade é não dualista, ou seja, não há para Husserl distinção entre matéria e espírito. Descartes defendia a ideia de que a consciência existia na alma e essa alma não era parte do mundo físico. Assim, para ele, matéria e espírito eram duas partes de realidades distintas. A visão de Husserl se opõe à essa concepção cartesiana que separa mente e corpo, já que é por meio do corpo que sou, esse corpo físico e espiritual, que me encontro como centro de referência para o resto do mundo.

Barco afirma que “para Husserl não se trata de propor ‘eu tenho um corpo’ – o que pressupõe um componente anímico possuidor –, mas sim ‘eu sou um corpo’.” (BARCO, 2012, p. 1). Sou esse corpo-próprio que não somente está no mundo, mas o habita fazendo dele um mundo vivido. Nesse ínterim, o corpo-próprio é o centro em relação ao qual os outros, coisas e sujeitos, ganham posição. Ele é anterior e pressuposto à toda vivência, abrindo-se ao mundo. A experiência desse corpo que sou com os demais se dá espacial e temporalmente e é compreendida como horizonte de doação de sentido, o que demanda pelos atos intencionais e tomadas de decisão.

Os atos intencionais são realizados por uma subjetividade ao dirigir-se atentamente a algo e se referem aos atos da consciência. Fenomenologicamente, consciência diz do movimento que mantém o visto, enlaçando-o. Consciência é a própria intencionalidade e não um recipiente que abarca julgamentos ou algo que

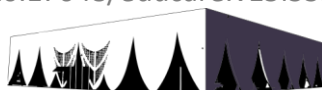


está em um espaço supramundano. O movimento da consciência intencional é complexo e, ao enlaçar o objeto que visa, efetua diversos atos, como perceber, recordar, repetir, comparar, imaginar etc. Ela nos dá uma totalidade em presença, abarcando figura e fundo (BICUDO, 2010, p. 30), amalgamando as experiências temporal e espacialmente vivenciadas.

O percebido no focado pela intencionalidade do olhar é destacado de um fundo mas nunca se mostra de modo isolado do contexto de onde se destaca. Podemos nos voltar para uma paisagem, intencionando-a, e num primeiro lance de olhar focar o céu, em seu azul resplandecente. Nesse momento, o céu é a figura principal, mas ele não se desliga desse fundo do qual se destaca, junto ao verde, aos pássaros. Em um momento imediatamente posterior, podemos nos atentar para a árvore frondosa e, então, ela passa a ser a figura intencionada pelo nosso olhar. O céu azul desliza para o fundo da paisagem nessa nova visada do olhar, mas também a sustenta, agora como fundo no qual a árvore se destaca.

É no ato da percepção, dada no aqui e no agora, que temos o visto que é sempre olhado da posição do corpo-próprio. A totalidade do objeto é constituída pelo amalgamado das diferentes perspectivas presentes e recordações que se entrelaçam em uma unidade, fazendo sentido para o sujeito que olha intencionalmente.

Atentemos para a mistura de ausências e presenças que se revelam no movimento do ato perceptivo. Por exemplo, quando ouvimos uma enunciação, nosso órgão da audição se volta para a parte da sentença imediatamente falada, ou seja, a fala presente. Mas o que ouvimos, de modo intencional, enreda isso que é dado em presença amalgamando-o à ausência das partes da sentença que já foram pronunciadas ou que ainda estão por serem ditas. A compreensão da sentença enunciada distingue-se da compreensão do silêncio, do ruído e das suas partes prévias ou vindouras. Ela é mais do que um somatório disso tudo: é uma unidade dada pela totalidade, no contexto de onde emerge. Tal qual em uma melodia, quando sentimos previamente o som que virá e aquele já entoado



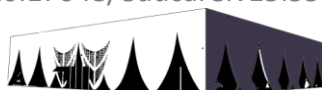
abarcando-os no momento presente, há uma totalidade na qual não é possível distinguir as partes temporalmente distintas. A experiência vivenciada se dá em um fluxo ininterrupto, em uma convergência de experiências passadas e futuras que se doam no ato presente.

Voltemos novamente ao poliedro. Se só olharmos para um de seus lados, o movimento rápido de nossos olhos solicita um tipo de mobilidade de busca de compreensão, ainda que este seja um ato não deliberado. Quando viramos o poliedro ou caminhamos em volta dele, a possibilidade buscada torna-se presente e a presencialidade anteriormente percebida desliza para a ausência. Nesse movimento, efetua-se um jogo entre percebido e intuído no qual presença e ausência se permutam e se complementam. As intenções vazias tornam-se cheias (percebidas na presencialidade do ver/visto) e as cheias tornam-se vazias (deslizam para a ausência do percebido), em um fluxo de vivências que é contínuo.

Nessa breve análise da percepção do poliedro, dois aspectos importantes, discutidos por Merleau-Ponty (2004), se destacam para que o objeto se faça presente: a visão e o movimento. O autor ressalta que o que alcançamos com o olhar está ao nosso alcance e faz parte do projeto motor do nosso corpo-próprio:

Basta que eu veja alguma coisa para saber juntar-me a ela e atingi-la, mesmo se não sei como isso se produz na máquina nervosa. Meu corpo móvel conta com o mundo visível, faz parte dele, e por isso posso dirigi-lo no visível. Mas também é verdade que a visão depende do movimento. Só se vê o que se olha. Que seria a visão sem nenhum movimento dos olhos, e como esse movimento não confundiria as coisas se ele próprio fosse reflexo ou cego, se não tivesse suas antenas, sua clarividência, se a visão não se antecipasse nele? (MERLEAU-PONTY, 2004, p.14)

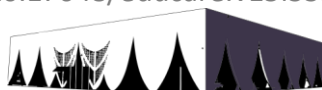
Merleau-Ponty destaca essa mutualidade entre visão e movimento na qual o mundo visível e os projetos motores do corpo-próprio são partes totais do mesmo ser. Percebemos um objeto da perspectiva do corpo-próprio, espacial e temporalmente situado, ou seja, do ângulo pelo qual a ele dirigimos nosso olhar. Ao estarem nos sendo dados diretamente os lados visíveis do objeto, intencionamos também os lados que estão invisíveis daquela perspectiva. Os lados visíveis e aqueles não vistos são dados em um modo que se complementa e ambos



configuram o que experienciamos do objeto, juntamente com as experiências vivenciadas anteriormente, possibilitando a compreensão da sua totalidade. No movimento de ver o objeto está envolvida uma mistura de ausência e presença das suas faces, as quais são antevistas no entorno em que o objeto é dado. Assim, a visualização do objeto, dada na percepção, é uma articulação de intenções cheias e vazias, isto é, é dado em um contexto que traz também aquilo que não está diretamente no nosso campo de visão.

Segundo Sokolowski (2010), podemos dizer que a atividade de perceber é, então, uma mistura: atos intencionam o que está presente e outros intencionam o que está ausente.

Tomemos o exemplo apresentado por Detoni (2011). Suponhamo-nos em frente a uma casa, olhando para ela de certa perspectiva. Nesse momento vemos um aspecto particular da frente da casa, dado de modo imediato como uma totalidade. Um novo posicionamento relativamente a ela é possível: deslocamo-nos um pouco para o lado e olhando por esse novo ângulo podemos visualizar de uma mesma perspectiva em que outra pessoa estava olhando e ver o mesmo aspecto visto por ela. Mas cada um de nós estará experienciando, dessa perspectiva, diferentes (porém semelhantes e convergentes) vivências de visualização dessa casa, pois essa vivência é intencional, ou seja, pertence a uma subjetividade que se dirige a algo, intencionando-o, portanto não se separando do sujeito que olha nem do entorno de onde o visto se destaca. Esses diferentes perfis visualizados (por uma pessoa ou distintas pessoas) são percepções dadas de modo imediato, enlaçando o ato de visualizar, a perspectiva da visada, as experiências pessoais, o modo como cada um se dirige para o objeto, as experiências que tiveram com a casa etc. O perfil pode depender inclusive de nossa disposição no tempo e da condição de nossos órgãos sensoriais: se estamos doentes ou cansados, o perfil pode ser vacilante em vez de fixo e focado. O caráter relativo e subjetivo do perfil não implica que ele seja uma ideia particular que permanece na subjetividade do sujeito que percebe, uma vez que pode ser comunicada na

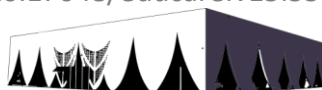


comunidade de cossujeitos. A expressão verbal dessa vivência da casa e da compreensão de suas características, perfis e da própria casa são aspectos que vão sendo construídos intersubjetivamente, na medida em que pessoas partilham suas vivências, expressando-as pela linguagem. Cada perfil percebido por uma individualidade é uma construção subjetiva que se dá no solo intersubjetivo.

A esfera intersubjetiva, em que as experiências se dão, é constituída mediante atos de percepção entropática (ALES BELLO, 2006), onde cada indivíduo percebe o outro como um semelhante, ou seja, alguém que, em sua intencionalidade voltada para o foco comum, partilha deste mesmo solo, o mundo-vida, podendo ser compreendido e compreender. A constituição da intersubjetividade se dá pelos atos entropáticos e pela linguagem que possibilita a comunicação explicitada pela fala, oral, escrita, gestual ou simbólica. Abrem-se, então, possibilidades de diálogo e reelaborações, que avançam em termos de compreensões dos conceitos e ideias envolvidos e na constituição do conhecimento, inclusive o científico.

Merleau-Ponty (1999), como Husserl, compreende a percepção como o modo de doação originária do mundo para o sujeito. A percepção nos dá um primeiro nível de compreensão do percebido, enlaçando o que se mostra no ato da percepção. Mesmo considerando o conhecimento científico, como o conhecimento geométrico axiomatizado, por exemplo, o autor enfatiza a sua estreita ligação com as vivências no mundo-vida e critica o modo como a ciência afasta-se desse solo. Ele diz:

Tudo que sei do mundo, mesmo por ciência, eu o sei a partir de uma visão minha ou de uma experiência do mundo sem a qual os símbolos da ciência não poderiam dizer nada. Todo o universo da ciência é construído sobre o mundo vivido, e se queremos pensar a própria ciência com rigor, apreciar exatamente o seu sentido e o seu alcance, precisamos primeiramente despertar essa experiência do mundo da qual ela é a expressão segunda. A ciência não tem e não terá jamais o mesmo sentido de ser que o mundo percebido, pela simples razão que é uma determinação ou uma explicação deles. (MERLEAU-PONTY, 1999, p. 3)



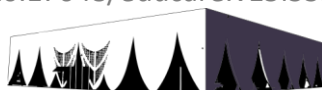
A Geometria, enquanto ciência dedutiva, acaba sofrendo um afastamento de seu sentido na vivência. Ela desenvolve-se no conjunto determinado por todos os pontos do espaço e se estrutura a partir de postulados e axiomas que relacionam o ponto, a reta e o plano, abordando os objetos com comprimento, largura e profundidade, suas relações e propriedades. Em seus aspectos pedagógicos, muitas vezes, as formalizações se destacam em detrimento da exploração dos atos perceptivos que embasam e sustentam o conhecimento geométrico. Não se trata de privilegiar um ou outro aspecto envolvido na constituição das ideias geométricas, mas de reconectar as ligações entre eles e avançar em termos da construção do conhecimento.

A fim de explicitarmos a retroalimentação entre os atos perceptivos e a produção das ideias geométricas, destacamos a vivência da experiência de visualização de um poliedro em caleidoscópio, buscando aproximações e articulações quanto ao modo fenomenológico de compreender a maneira pela qual o sujeito está com o objeto matemático e a importância dos atos perceptivos (MERLEAU-PONTY, 1999) na constituição do conhecimento e no encadeamento de outros atos e compreensões possíveis.

A seguir, apresentamos uma explicação, matemática, sobre a geração de imagens em caleidoscópio, em especial em caleidoscópios generalizados que permitem a visualização de poliedros de Arquimedes. Para além de uma análise do estudo do processo físico-geométrico de geração de imagens entre espelhos, avançamos, posteriormente, em nossas análises quanto aos atos perceptivos vivenciados na experiência de compreensão do poliedro, dados pela manipulação ou visualização por meio de diferentes recursos, incluindo o caleidoscópio.

2 GERAÇÃO DA IMAGEM DE UM POLIEDRO EM CALEIDOSCÓPIO

Buscando situar o leitor quanto à geração de imagens em caleidoscópios generalizados, apresentamos conceitos e propriedades matemáticas que embasam



o entendimento desse processo, indicando trabalhos que possam subsidiar estudos mais detalhados.

Os poliedros pertencem ao conjunto dos objetos espaciais que possuem comprimento, largura e profundidade. Todas as faces da sua superfície são planas, a intersecção de duas faces é chamada aresta e a intersecção de três ou mais arestas é denominado vértice. Quando se tem o mesmo arranjo de polígonos distribuídos ao redor de cada vértice e esses polígonos são regulares e congruentes, tem-se um poliedro regular, também denominado poliedro de Platão (atentamos que nem todo poliedro de Platão é necessariamente regular).

Já os poliedros de Arquimedes são poliedros semi-regulares, ou seja, têm faces regulares mas não todas congruentes entre si. Para exemplificar, considere um rombicosidodecaedro arquimediano (figura 1, (5)). Seus vértices apresentam a seguinte disposição de polígonos ao seu redor, assim ordenados em sentido horário: triângulo, quadrado, pentágono e quadrado. Por isso, ele também é denominado poliedro (3,4,5,4), em referência à quantidade de lados das faces. Esse poliedro de Arquimedes pode ser obtido pelo truncamento do icosaedro platônico (Figura 1): a partir do icosaedro platônico (1) se procede ao primeiro truncamento dos vértices deste e obtém-se então o icosaedro truncado arquimediano (2). Com uma segunda aplicação do processo de truncamento se consegue o icosidodecaedro arquimediano (3) o qual é novamente submetido ao processo gerando um sólido que possui retângulos em suas faces. Quando os retângulos são transformados em quadrados chega-se ao icosidodecaedro truncado arquimediano (4). Finalmente, truncando-se este último, chega-se ao rombicosidodecaedro arquimediano (5).

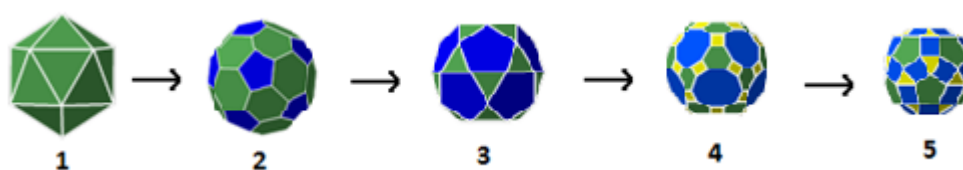


Figura 1: processo de geração do rombicosidodecaedro arquimediano, ou poliedro (3,4,5,4), a partir do icosaedro platônico



Em situações de ensino, ao tratar do tema poliedros, é comum que o professor aborde o conteúdo utilizando figuras construídas por meio de uma planificação, que é recortada, dobrada e colada. É possível manipular a figura obtida de modo a visualizar suas faces, arestas e vértices, investigando propriedades e relações matemáticas inerentes a ela. Utiliza-se também a representação de objetos geométricos construídos com madeira, isopor ou outro material, com tamanhos e texturas diversas. Outra maneira de abordar esse conteúdo envolve o trabalho com caleidoscópios generalizados e com regiões construídas ad hoc em papel, que são colocadas no seu interior, chamadas *bases geradoras* (BATISTELA, 2005).

Um caleidoscópio generalizado é formado por três espelhos planos dispostos na forma de um triedro, que possibilita o visual de figuras espaciais. Tais caleidoscópios, devido aos ângulos diedrais, permitem a geração de imagens de poliedros quando a base é colocadas no seu interior (Figura 2a).

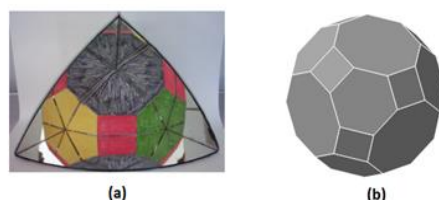
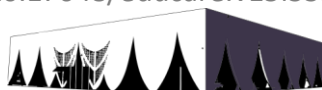


Figura 2: caleidoscópio generalizado e base geradora de papel para visualização do cuboctaedro rombitruncado ou poliedro (4, 6, 8).

O caleidoscópio permite a reflexão de imagens na qual podemos visualizar algumas faces, vértices e arestas do poliedro e, diferentemente do sólido construído com madeira ou outro material, não permite a manipulação do poliedro gerado.

Batistela (2005) apresenta um estudo das relações geométricas envolvidas na reflexão de imagens entre os espelhos que permite compreender, analiticamente, como elas ocorrem, destacando a utilização dos caleidoscópios na obtenção de poliedros arquimedianos pela confecção de bases obtidas a partir da planificação e recorte de uma configuração poligonal.



A obtenção do visual do poliedro se dá porque em qualquer reflexão em um espelho plano o objeto e a imagem são equidistantes do plano do espelho. Então todas as imagens de um ponto colocado no interior do caleidoscópio pertencem à esfera com centro no ponto de intersecção dos planos dos três espelhos. Tais planos interseccionam a esfera determinando um triângulo esférico de ângulos $180/l$, $180/m$, $180/n$ onde l , m e n são divisores inteiros de 180° . O resultado da reflexão desse triângulo esférico nos espelhos é a divisão da esfera toda em uma rede de tais triângulos (Figura 3) que contém a imagem de qualquer objeto colocado no interior do caleidoscópio.

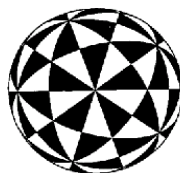
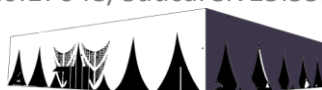


Figura 3: rede de triângulos esféricos recobrimdo uma esfera

A partir do estudo das relações esféricas determinadas, podemos encontrar os valores da terna (l, m, n) que possibilitam a geração perfeita de triângulos esféricos que recubram totalmente a esfera, sem sobreposições ou lacunas (BATISTELA, 2005). Ball; Coxeter (1987) mostram que os valores de l , m e n que satisfazem a condição desejada são $(2,2,3)$, $(2,2,4)$, $(2,2,5)$, $(2,3,3)$, $(2,3,4)$ e $(2,3,5)$. Então, para cada terna correspondem os caleidoscópios cujos ângulos são o resultado da divisão de 180° por esta terna. Para a terna $(2,3,3)$, por exemplo, corresponde o caleidoscópio com ângulos diedrais $(90^\circ, 60^\circ, 60^\circ)$. Ainda devem ser considerados os ângulos centrais dos setores circulares formados pelos espelhos, que podem ser deduzidos pela lei dos cossenos na geometria esférica. No exemplo considerado, o caleidoscópio deverá ter os seguintes ângulos centrais: $70^\circ 52'$, $54^\circ 54'$ e $54^\circ 54'$.

Para a construção do caleidoscópio generalizado (Figura 4), sugere-se o truncamento dos setores circulares de cada espelho (Figura 4. (a)), para facilitar o manuseio (BATISTELA, 2005).



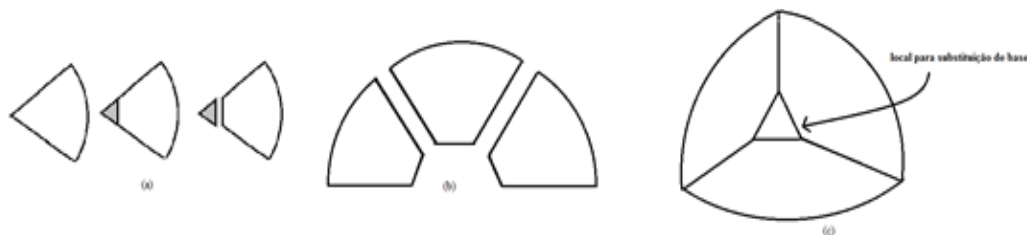


Figura 4: (a) modelo de espelho na forma de setor circular e truncamento do setor circular; (b) esquema de caleidoscópio generalizado planejado; (c) esquema de um caleidoscópio generalizado e indicação do local para a colocação da base.

Em Batistela (2005), podemos acompanhar a construção do caleidoscópio e respectiva base para a visualização do rombosidodecaedro (Figura 1(5)). Utiliza-se o caleidoscópio generalizado com ângulos diedrais de $(90^\circ, 60^\circ, 36^\circ)$ e ângulos dos setores circulares $(20^\circ 54', 31^\circ 43', 37^\circ 23')$. A Figura 5 apresenta as etapas de confecção da base caleidoscópica feita em papel para a visualização, quando colocada no interior do caleidoscópio, do rombosidodecaedro arquimediano. O espaço de 12° entre o triângulo e o quadrado da base (Figura 5(b)) deve ser recortado para que, após convenientemente dobradura, os polígonos da base fiquem perpendiculares aos espelhos.

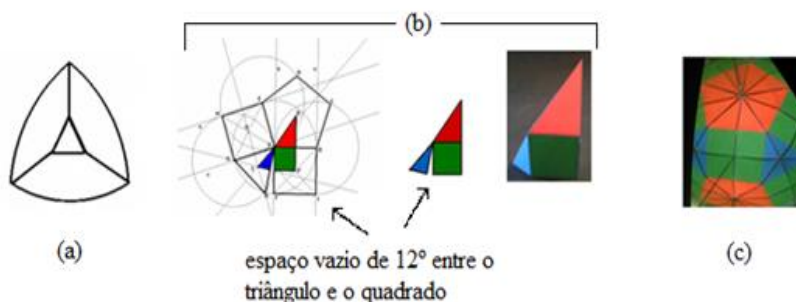
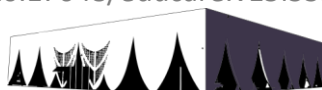


Figura 5: (a) caleidoscópio generalizado (b) base construída com régua e compasso, recortada e dobrada (c) geração do rombosidodecaedro arquimediano no caleidoscópio.

Nesta breve apresentação dos caleidoscópios generalizados e bases, destacou-se a importância dos conceitos e propriedades matemáticas para a compreensão do processo de geração de imagens entre os espelhos e a confecção das bases e do próprio caleidoscópio. No âmbito pedagógico, diversos estudos com o uso desse recurso para o ensino de geometria, realizados por pesquisadores como Murari (1999), Martins (2003), Almeida (2003) BATISTELA (2005), Reis (2006) Gouveia (2005), BATISTELA (2006; 2013), Buske (2007), Neves (2011),



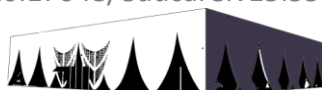
destacam o apelo estético que os espelhos e as imagens exercem ao olhar dos sujeitos das pesquisas, fascinando pela reflexão e geração de imagens. Desse fascínio, os estudos avançam em trabalhos pedagógicos no ensino e aprendizagem dos conceitos e ideias matemáticas presentes na construção das bases e caleidoscópios e na geração de imagens. Os estudos destacam o ensino e aprendizagem da matemática, por meio da exploração de intuições e verificações possibilitadas pela visualização em caleidoscópios.

A seguir, focaremos nossas análises nos atos intencionais presentes ao visualizarmos um objeto poliédrico. Em seguida, nos atentaremos ao poliedro gerado pela reflexão de imagens em caleidoscópio. Buscaremos compreender o primado da percepção (MERLEAU-PONTY, 1999) que se dá ao estarmos junto aos caleidoscópios, visualizando e compreendendo o poliedro, avançando nossa discussão quanto aos atos intencionais e seus desdobramentos. Assumindo a visão fenomenológica quanto à constituição do conhecimento, exporemos modos pelos quais se dá a experiência consciente da percepção de um poliedro, focando, inicialmente, em sua idealidade geométrica e na percepção de sua representação física, e, depois, na visualização de um poliedro em caleidoscópio generalizado.

3 A EXPERIÊNCIA DA PERCEPÇÃO DE UM POLIEDRO

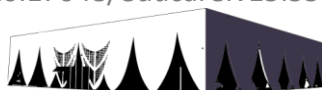
Por serem objetos geométricos idealizados, ou seja, que não existem efetivamente em uma materialidade física, sendo apenas passíveis de serem representados por objetos físicos, é comum utilizarmos as representações para dizer do próprio poliedro. Em tais representações, ele é visualizado em perspectivas, em um movimento intencional de uma experiência consciente na qual pode ocorrer a percepção da unidade do objeto. Sendo assim compreendida, a percepção do poliedro representado pelo objeto físico envolve uma mistura de atos intencionais que presentificam, num só ato, faces visíveis e ausentes.

Sokolowski (2010), ao focar a experiência de visualização de um cubo, destaca três camadas que se distinguem:



1) há os seis lados do cubo. Cada lado pode ser dado sob diferentes perspectivas. Se segurarmos um lado diretamente diante de nós ele é apresentado como um quadro, mas se inclinarmos o cubo ligeiramente para longe de nós o lado vem a ser dado como um ângulo que se assemelha mais a um trapézio. Os cantos mais distantes parecem mais juntos um do outro do que os mais próximos. Se inclinarmos o cubo para um pouco mais longe, o lado torna-se quase uma linha, e então, finalmente, se o inclinamos apenas um pouco mais, o lado desaparece da visão. Um lado pode ser dado de modos diferentes, assim como o cubo pode ser dado de diferentes lados. 2) vamos chamar cada um dos modos nos quais o lado é dado de aspectos [...] como um cubo aparece para nós em muitos lados, assim cada lado pode aparecer para nós de muitos aspectos, e esses aspectos, transitivamente, são também aspectos do cubo. Porém, podemos dar um passo além. 3) podemos visualizar um aspecto particular em um dado momento; podemos fechar nossos olhos por um minuto, e então abri-los novamente. Se não tivermos nos movido, teremos o mesmo aspecto dado para nós novamente. O mesmo aspecto pode ser dado para nós como uma identidade, por meio de uma sucessão de aparecimentos temporariamente diferentes. Cada uma dessas visões momentâneas é um perfil do aspecto. É transitivamente também um perfil do lado e um perfil do cubo. Um perfil é uma apresentação temporariamente individualizada de um objeto. [...] em última instância, então, o cubo é dado para nós em um dos muitos modos de perfis. (SOKOLOWSKI, 2010, p. 27).

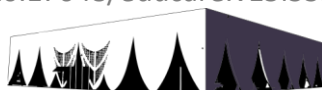
Similarmente, atentemos para a experiência de visualização de um rombicosidodecaedro. Cada face do poliedro pode ser dada de diferentes perspectivas, à medida que movimentamos o objeto ou nosso olhar sobre ele. Se olharmos diretamente, de frente para ele e bem próximo ao nosso olhar, visualizamos um quadrado, ou um pentágono ou um triângulo, porém, diferentemente do cubo onde é possível que uma das faces oculte as demais, veremos também outras faces, ou lados, desse poliedro. Podemos focar cada uma delas, individualmente, atentando para suas particularidades, ou comparando-as com as demais já percebidas, uma vez que há, também, a percepção de uma regularidade do poliedro. Se nos inclinarmos, veremos que ao redor de cada vértice de uma face individual há outros polígonos e, se nos inclinarmos um pouco mais, pode ocorrer que uma das faces venha a se esconder e outras se tornem visíveis. Podemos focar nosso olhar ao redor de um vértice, atentando-nos para a configuração de polígonos que se destaca. Se afastarmos um pouco mais o nosso olhar, de modo que vejamos várias faces e vértices, podemos perceber que um certo padrão de repetição dessa configuração se mantém, ainda que não as



vejamos todas em um único lance de olhar. Nos damos conta de que esse padrão é cíclico, ou seja, se repete com regularidade.

Assim, na experiência de visualização de um rombicoidedraedro também podemos distinguir as três camadas explicitadas por Sokolowsky (2010), porém em uma experiência distinta à do cubo. Uma face do poliedro pode ser dada de modos diferentes, assim como o poliedro pode ser dado pela configuração que se repete ao redor de cada vértice. Chamemos, ao modo de Sokolowski (2010), cada um dos modos pelos quais o poliedro nos é dado de aspecto. Podemos dizer que cada visualização do poliedro, formada por uma configuração de polígonos regulares ao redor de cada vértice, tem o aspecto de uma configuração. O rombicoidedraedro pode ser denominado poliedro (3,4,5,4), dado que ele é formado por triângulos, quadrados e pentágonos, perfazendo 62 faces. Como ele aparece para nós em muitos lados, cada lado pode aparecer para nós de muitos aspectos, e esses aspectos que configuram as suas regiões laterais, transitivamente, são também aspectos do rombicoidedraedro. Ao visualizarmos um aspecto do poliedro, se fecharmos e abrirmos os olhos rapidamente, sem que nos movamos ou movimentemos o poliedro, veremos o mesmo aspecto, mas que, entretanto, poderá vir a ser percebido de outro modo, de acordo com a disposição do olhar. A cada uma dessas visões momentâneas se presentifica o perfil do aspecto, que nos dá indícios do poliedro focado.

Um perfil é uma apresentação individualizada da percepção de uma das perspectivas de um objeto. Essas percepções são pontuais, ou seja, ocorrem no agora, e são sentidos que se mostram e que enlaçam atos da consciência que vão se entrelaçando, culminando em compreensões e possíveis expressões do percebido e compreendido. Os aspectos que se mostram são apenas perfis que podem vir a ser reunidos, pelos atos da consciência, em uma totalidade. A percepção do aspecto transcende o instante em que se dá, mediante a possibilidade de repetição, presencial ou na recordação. Quando experienciamos vários aspectos de um poliedro, por várias perspectivas, e o visualizamos em



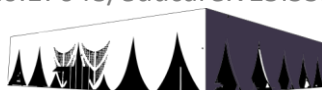
vários perfis, vamos unificando essa multiplicidade de perfis visualizados, de modo que os percebemos como pertencendo a um mesmo e único objeto. Os lados, aspectos e perfis tornam-se presentes para nós e, neles todos, o mesmo poliedro está sendo apresentado. As diferentes camadas que experienciamos avançam em direção à identidade que é dada continuamente por meio de repetições.

A percepção se desdobra em atos conscientes que vão constituindo camadas de sínteses e camadas de múltiplas apresentações. Seria errado dizer que um poliedro é tão somente a soma de todos os seus perfis, mesmo porque os perfis são infindáveis, uma vez que são dados temporal e espacialmente a um sujeito que percebe. A identidade do poliedro se mostra como sendo diferente daquela dos lados, aspectos e perfis e nos é apresentada como uma totalidade que expressa a identidade em todos eles.

A seguir, explicitamos, em uma postura fenomenológica, a experiência intencional da percepção de um poliedro de Arquimedes, com destaque para a visualização em caleidoscópios, atentando para a percepção por perfis, a constituição da totalidade do percebido e a comunicação entre sujeitos, em um movimento que tem como primado os atos perceptivos (MERLEAU-PONTY, 1999) na compreensão do poliedro e de sua identidade.

4 A PERCEPÇÃO DE UM POLIEDRO VISUALIZADO EM CALEIDOSCÓPIO

Em situações de ensino, é muito comum as escolas disporem de recursos didáticos, como os sólidos geométricos, que são utilizados para apresentar as formas espaciais aos alunos. Consideremos um poliedro construído em madeira ou outro material passível de ser manipulado: além de olhá-lo, podemos tocá-lo, movimentando-o para ver que tipo de ruído faz, sentir sua superfície, perceber de que material é feito. Nessas experiências sensoriais, diferentes modalidades do sentir entram em jogo. Todas elas são apresentações que podem se doar ao sentido do poliedro dado na vivência. Tratam-se de modos de percepção do objeto nos



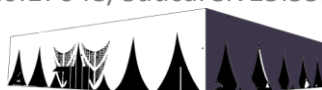
quais focamos também as propriedades materiais de sua representação e não apenas sua forma geométrica. Todas elas se entrelaçam na percepção do objeto poliédrico em destaque, mas vale notar que, dentre os órgãos do sentido, a visão e o tato permitem a exploração do seu formato geométrico, dando-nos, assim, o poliedro em presença. O ouvir, o degustar, o cheirar, o sentir a textura nos dão as propriedades do material que compõe aquela representação física e não o seu caráter de ter um formato poliédrico ou as características geométricas de sua forma.

Quando consideramos a imagem do poliedro gerado em caleidoscópios, em uma primeira visada, podemos ter uma intuição que destaca ao nosso olhar o objeto poliédrico que surge na reflexão de imagens (Figura 6). A visão se destaca na percepção da forma geométrica do poliedro. Ela é o órgão do sentido que nos dá a intuição primeira do objeto poliédrico percebido entre os espelhos. Em uma primeira visada no caleidoscópio, temos uma intuição que destaca ao nosso olhar o objeto poliédrico que se mostra na reflexão entre os espelhos.



Figura 6: visualização do poliedro (4,6,6) em caleidoscópio generalizado

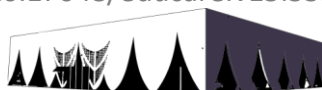
Ainda que a representação do poliedro de madeira não seja o poliedro em si (considerando a idealidade desse objeto matemático), pode parecer ainda mais distante, em princípio, a relação entre o poliedro e a imagem gerada no caleidoscópio. Por outro lado, na vivência perceptiva de visualizar, esse distanciamento parece não ocorrer quando atentamos para a imagem poliédrica gerada pelo caleidoscópio e pela base. A identificação do poliedro, neste caso, se dá de modo imediato e é distinta daquela possibilidade pelo objeto de madeira, porém ambas as vivências são convergentes para a mesma ideia: a de um poliedro.



No caso da figura em madeira, podemos descolar, girar, enumerar faces e, assim, conferir suas propriedades poliédricas. Com a imagem no caleidoscópio essa manipulação não é possível, mas análises de propriedades e características podem ser destacadas no ato perceptivo. Ao observá-lo atentamente, podemos fazer afirmações como quantos lados, vértices e arestas possui, qual a razão entre medidas, quais ângulos são congruentes. O sujeito que visualiza pode perceber a presença do poliedro enquanto um objeto que se doa em sua totalidade dada no visual possibilitado pelas imagens geradas no caleidoscópio. A imagem gerada traz a ideia do poliedro, mesmo que jamais possamos visualizar as faces “de trás”, já que não podemos girar a imagem, o caleidoscópio ou a base sem que o poliedro se esvaia. Assim, mesmo que as faces escondidas jamais possam ser visualizadas, elas podem ser intuídas no ato de perceber. O poliedro visualizado torna-se presente para o sujeito que o intenciona, e este pode atentar-se para a imagem e intuir relações e propriedades, ainda que não possa “ver” as faces não visíveis, como poderia no sólido.

A imagem refletida é um efeito mecânico do jogo de luz e cores entre os espelhos, mas se nela reconhecemos o objeto é o pensamento que tece esse vínculo, um pensamento que “decifra” a imagem gerada, significando-a (MERLEAU-PONTY, 2004). Pensamento, aqui, diz de um movimento de reunião e articulação de sentidos, que traz também lembranças, imaginação, comparações, organizações lógicas etc. Cores, profundidade, ângulo e orientação do olhar também balizam essa compreensão. A visão é, como nos diz Merleau-Ponty (2004), estimulada a pensar junto a eles. É um ver em ato.

Qualidade, luz, cor, profundidade, que estão aí diante de nós, aí só estão porque despertam um eco em nosso corpo, porque este lhes faz acolhida (Merleau-Ponty, 2004). Nessa direção, Merleau-Ponty (2004, p. 27) se contrapõe a Descartes destacando que, para este, o corpo não é meio da visão, mas apenas depositário dela. E argumenta que

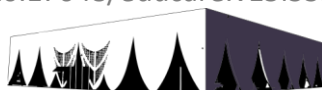


o espaço é contado a partir de mim como ponto ou grau zero da espacialidade. Eu não o vejo segundo seu envoltório exterior, vivo-o por dentro, estou englobado nele. Pensando bem, o mundo está ao redor de mim, não diante de mim. (MERLEAU-PONTY, 2004, p. 27)

O autor destaca ainda: “o olho é aquilo que foi comovido por um certo impacto do mundo” (MERLEAU-PONTY, 2004, p. 22). Se vejo o poliedro no caleidoscópio só o vejo justamente por meio dos elementos que estão ali dispostos e que despertam ao olhar intencional de meu corpo-próprio o sentido do poliedro. O ato da percepção do poliedro na visualização nos caleidoscópios ressalta que o objeto visado é o correlato intencional de uma consciência que o visa. Trata-se de um encontro no qual o olhar foca justamente isso e não aquilo, dessa forma e não de outra. O percebido na percepção abre-se a uma compreensão que extrapola as partes individuais em detrimento de articulações que se efetuam nas ações da consciência em direção à totalidade do objeto intencionado, neste caso, o poliedro.

A totalidade do poliedro pode ser percebida, ainda que ele não seja nem o caleidoscópio nem a base. A unidade que esse conjunto nos dá permite que no ato perceptivo enfoquemos o poliedro, intencionando-o. A visualização possibilitada oferece a experiência de percepção do objeto embora sequer a reflexão nos espelhos seja o poliedro em si. Aliás, a base e o caleidoscópio, considerados individualmente, não trazem, sequer, a ideia de um poliedro e, talvez, alguém que não tivesse contato com tais objetos jamais pudesse imaginar a relação entre eles e a possibilidade de visualização.

A percepção possibilitada pelos dois objetos, propositadamente construídos e articulados para gerar imagens previsíveis entre os espelhos, nos remete a uma nova experiência de percepção do poliedro, diferentemente da experiência com o sólido manipulável. A composição formada pela base e pelo caleidoscópio nos dá um “novo” objeto intencional que, em princípio, nada carrega desses dois, individualmente considerados, mas que não existiria sem eles. Nessa experiência de visualização, não paramos, inicialmente, para pensar como se dá o processo mecânico de reflexão, qual o ângulo entre os espelhos ou como se dá a reflexão da imagem da base. Apenas nos voltamos para a totalidade da imagem gerada.



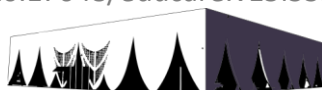
Quando focamos o poliedro, não atentamos para os elementos envolvidos para que fosse possível visualizá-lo, por outro lado, visualizamos muito mais do que o que a “estrutura” montada entre os espelhos nos dá, já que, em hipótese alguma, poderíamos enxergar as faces ocultas do poliedro, mas não colocamos em dúvida a possibilidade delas existirem. Nem o próprio poliedro é colocado sob suspeita: ainda que não possa ser tocado nem manipulado, ele está ali, dado na percepção intencional da consciência que o foca.

Há um encontro entre consciência intencional e objeto intencionado.

Esse encontro é o momento da percepção que não é apenas subjetiva, uma vez que é um ato intencional da consciência pelo qual a coisa vista é enlaçada e, desse modo, dada à consciência, como sentido percebido no ato da percepção ou na vivência. Trata-se de um ver imediato, entendido como intuição do que é isto que é visto. É um ver com sentido, uma vez que o visto é compreendido em sua totalidade, isto é, em sua figura, ou núcleo, e fundo, seu entorno, ou contexto (BICUDO, 2010, p. 30).

Toda a estrutura, incluindo o caleidoscópio, a base geradora e o próprio modo como estão dispostos, fornece imagens reais e virtuais que se complementam, gerando partes do poliedro intencionado, nos dando o poliedro enquanto presença. Essa estrutura se doa como um pano de fundo tênue que, em um momento posterior, pode vir a ser investigada. Podemos nos indagar: qual ângulo com o espelho permite que um lado da base e sua imagem tenham a planitude necessária para gerar um lado do poliedro? Qual a relação entre as medidas da base e a do poliedro gerado? Aqui avançamos em direção a outros atos que visam investigar o visualizado. Nesse caso, a manipulação das peças, ainda que resulte na extinção do poliedro, nos permitirá inferir hipóteses e comparar resultados para compreender aspectos dessa estrutura que agora se destaca como foco principal da intencionalidade. O poliedro não é mais o objeto de destaque, o núcleo, mas continua a se doar como um fundo que possibilita efetuarmos inferências e conclusões.

Ao focarmos a visualização gerada nos espelhos, observamos que a base contém apenas partes das faces dos polígonos que formam o poliedro e essas partes são planejadas para que a reflexão delas nos espelhos gere uma face



completa e novas reflexões. Dessa forma, as faces do poliedro são constituídas de uma parte “real”, ou palpável, e de outras partes virtuais que são geradas pela reflexão da primeira nos espelhos. No rebatimento das imagens entre os espelhos, as partes real e virtuais se fundem e se confundem, eliminando a cisão entre elas, possibilitando o visual de uma face completa do poliedro gerado.

Assim, o olhar atento do observador pode deslanchar por observações e análises que solicitam raciocínios e verificações os quais, por sua vez, permitem compreender a constituição do poliedro. Batistela (2005), em seu estudo sobre a construção das bases para caleidoscópios generalizados para a visualização de poliedros de Arquimedes, descreve que o processo de descoberta das bases se deu por tentativa e erro buscando localizar no poliedro alguma configuração que pudesse se encaixar nos ângulos dos caleidoscópios. Por exemplo, para o caso do poliedro (4, 6, 6) visualizado no caleidoscópio generalizado com ângulos diedrais (90° , 60° , 60°) (Figura 6), a base foi encontrada buscando na planificação do poliedro uma região poligonal que pudesse ser refletida nos espelhos dando origem às faces desse poliedro (Figura 7) (BATISTELA, 2005).

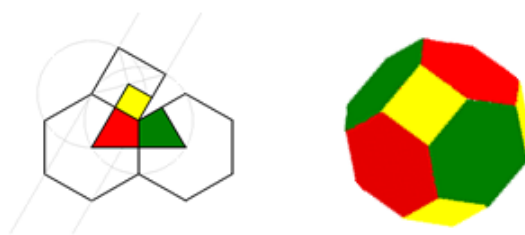
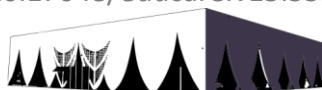


Figura 7: Base caleidoscópica que permite a visualização do poliedro (4,6,6), elaborada a partir da planificação do cubo truncado rombitruncado.

A constituição do poliedro e as ações desencadeadas, ou que podem ser desencadeadas, têm como ponto comum percepções possibilitadas pelo olhar intencional dos sujeitos envolvidos. Avançar na direção de compreensões geométricas solicita desdobramentos, em uma retomada dos atos perceptivos e processos cognitivos, dentre os quais a recordação, a imaginação, a comparação, e o voltar-se sobre esses atos em ações reflexivas. Solicita ainda que o percebido possa ser expresso e compartilhado junto aos cossujeitos. Essa comunalização



pode avançar por compreensões entre os envolvidos, tornando possível a construção intersubjetiva. Ao ser expressa, a vivência individual transcende a esfera subjetiva. Desse modo, essa totalidade percebida e nomeada, por palavras ou por símbolos, pode ser repetida e reelaborada, e essa repetição pode oferecer oportunidades de diálogo sobre essa experiência percebida intersubjetivamente.

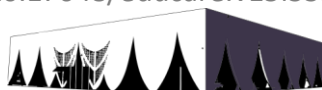
Transcendendo as percepções individuais do objeto, que já não é objeto apenas para um sujeito, mas para um grupo que se constitui na esfera intersubjetiva, avançamos no movimento de constituição da objetividade. Trata-se de um movimento que abarca a consciência subjetiva e o solo intersubjetivo e que solicita diferentes atos e modos de expressão que permitam encadear logicamente conexões de juízos. Podemos entender que a objetividade

(...) é constituída na dialética subjetividade/intersubjetividade, cujo movimento se dá no solo do mundo-vida, que é histórico, cultural e baseado, primordialmente, na comunicação entre sujeitos, sustentada pela estrutura lingüística. Sendo uma objetividade constituída, dá-se à interpretação daqueles que a focalizam intencionalmente, na busca do sentido. É uma objetividade que se estrutura sobre compreensões e interpretações históricas e culturais e que se mantém na linguagem e é veiculada pela tradição. (BICUDO, 2010, p. 38)

Atentando para a sala de aula ou situações de ensino, a exploração dos recursos discutidos neste artigo (caleidoscópios, bases, sólidos) com foco nos atos intencionais e suas expressões podem indicar caminhos possíveis para que desdobramentos e aprendizagens ocorram a partir de ações que auxiliem o compartilhamento de compreensões entre os alunos e a busca por novas reelaborações, inclusive em direção a encadeamentos cognitivos necessários ao estudo analítico-geométrico e formal das ideias geométricas envolvidas.

5 POSSIBILIDADES DE DESDOBRAMENTOS PEDAGÓGICOS

A ciência Geometria, em sua constituição, necessita de articulações que direcionem as experiências vivenciadas, compreendidas e expressas pela linguagem que, por sua vez, permitam novas articulações, provendo um campo de conhecimento latente em suas possibilidades. Assim, a manipulação dos objetos



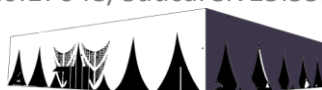
é relevante para a experiência dos aspectos geométricos, porém, não dá conta, em si, de destacar ideias, conceitos e consequências, exigindo outros atos da consciência, perceptivos e de juízo, que possibilitem análises nas quais esses diferentes atos intencionais são articulados.

Resultados de estudos sobre o uso de caleidoscópios no ensino (BATISTELA; SANTOS, 2013; SANTOS; BATISTELA, 2013), indicam que as experiências conjuntas e o compartilhamento de compreensões abrem possibilidades de diálogo e reelaborações, que avançam em termos de exploração dos conceitos, destacando o trabalho investigativo. Esse avançar só se dá junto às experiências perceptivas que os recursos permitem. Tais experiências alavancam ações e raciocínios que podem desdobrar-se em compreensões e juízos conjuntos, já que a percepção que se doa na possibilidade de manipulação e visualização que os recursos permitem não é apenas subjetiva, pois é um ato intencional que se dá em um solo intersubjetivo, no qual estamos com o outro cambiando informações, dialogando, entrando em contato. Desse modo, possíveis propriedades e relações podem ser expressas, (re)elaboradas e acordadas no ambiente coletivo de ensino.

No ato perceptivo algo se mostra, ou se faz, ao sujeito, mas este algo também está se fazendo, em um fluxo ininterrupto de vivências junto aos cossujeitos. Há uma doação de sentidos da perspectiva espaço-temporal onde cada vivência se dá em uma reelaboração na qual outras experiências à ela são amalgamadas. Assim, no contexto pedagógico, principalmente, não podemos prescindir da dimensão existencial quando enfocamos os atos que levam à produção do conhecimento. Não se trata apenas de atentar para a correlação estímulos-respostas, mas sim para o modo como as ideias e conceitos se doam à intelecção e aos atos que os originam.

REFERÊNCIAS:

ALES BELLO, A. *Introdução à Fenomenologia*. Bauru: EDUSC. 2006.



ALMEIDA, S. T. *Um estudo de pavimentações do plano utilizando caleidoscópios e o software Cabri-Géomètre II*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

BALL, W. W. R.; COXETER, H. S. M. *Mathematical Recreations and Essays*. New York: Dover, 1987.

BARCO, A. P. A concepção husserliana de corporeidade: a distinção fenomenológica entre corpo-próprio e corpos inanimados. *Synesis* (Petrópolis), 4, p. 1-12, 2012.

BATISTELA, R. F. *Um kit de espelhos planos para o ensino de geometria*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

BATISTELA, R. F.; SANTOS, M. R. O uso dos caleidoscópios em cursos de licenciatura em matemática: possibilidades investigativas. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11, 2013, Curitiba. *Anais...* Curitiba: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2013. p.1-12.

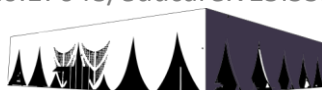
BICUDO, M. A. V. Filosofia da Educação Matemática segundo uma perspectiva fenomenológica. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). *Filosofia da Educação Matemática: fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas*. São Paulo: Editora UNESP, 2010. p. 23-46.

BICUDO, M. A. V.; KLUTH, V. S. Geometria e Fenomenologia. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). *Filosofia da Educação Matemática: fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas*. São Paulo: Editora UNESP, 2010. p. 131-147.

BUSKE, N. *Uma contribuição para o ensino de geometria utilizando origami e caleidoscópio*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.

DETONI, A. Sobre a percepção espacial. *Rem: Rev. Esc. Minas*, Ouro Preto, v. 54, n. 1, p. 81-84, 2001.

GOUVEIA, F. R. *Um estudo de fractais geométricos através de caleidoscópio e software de geometria dinâmica*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.



MARTINS, R. A. *Ensino-aprendizagem de geometria: uma proposta fazendo uso de caleidoscópios, sólidos geométricos e softwares educacionais*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

MERLEAU-PONTY, M. *Fenomenologia da percepção*. São Paulo: Martins Fontes, 1999.

_____. *O olho e o espírito*. São Paulo: Cosac & Naif, 2004.

MURARI, C. *Ensino-aprendizagem de geometria nas 7^a e 8^a séries, via caleidoscópios*. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.

NEVES, P. R. V. *Um Estudo das Simetrias sob o Ponto de Vista Geométrico e Algébrico*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2011.

REIS, J. A. S. *Geometria esférica por meio de materiais manipuláveis*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

SANTOS, M. R.; BATISTELA, R. F. A matemática possível de ser trabalhada com a utilização de espelhos planos, espelhos articulados e caleidoscópios. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11, 2013, Curitiba. *Anais...* Curitiba: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2013. p.1-12.

SANTOS, M. R. *Pavimentações do plano: um estudo com professores de Matemática e Arte*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

SANTOS, M. R. *Um estudo fenomenológico sobre conhecimento geométrico*. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2013.

SOKOLOWSKI, R. *Introdução à Fenomenologia*. São Paulo: Edições Loyola. 2010.

Recebido em: 22/05/2019

Aprovado em: 13/11/2019

