Especificidades das tarefas para a formação (TPF) para desenvolver o conhecimento especializado do professor no âmbito do pensamento algébrico: entendendo regularidades de repetição

Miguel Ribeiro[1]

Resumo: A prática matemática do professor, e os objetivos de aprendizagens matemáticas que persegue, sustentam-se na preparação e implementação de tarefas e no conhecimento que detém, ou assume deter, em cada um dos tópicos. Considerando-se que o conhecimento do professor impacta diretamente os resultados dos alunos, para transformar a prática é fundamental conhecer o conteúdo desse conhecimento e como o desenvolver e para isso, é fundamental focar a discussão matemática onde os alunos revelam maiores dificuldades, e o Pensamento Algébrico é um desses temas. No Pensamento Algébrico essa adequação refere-se, entre outros, à necessidade de deixar de focar nos padrões que exteriorizam as regularidades e passar a focar nas regularidades em si, que elas sim são generalizáveis. Neste texto, discuto a necessidade de mudança de foco dos padrões para as regularidades matemáticas e o conteúdo de uma Tarefa para a Formação (TpF) para desenvolver o Conhecimento Especializado do professor – na perspectiva do *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* – no âmbito do Pensamento Algébrico.

Palavras-chave: Regularidades de repetição; pensamento algébrico; tarefas para a formação; MTSK.

Specificities of tasks for teacher tducation for developing mathematics teachers specialized knowledge in the scope of algebraic thinking: giving meaning to repeating regularities.

Abstract: Teacher's mathematical practices and the mathematical learning goals pursued are grounded on the preparation and implementation of tasks, and the knowledge teacher's holds, or assumes (s)he holds, in each of the topics. Considering that teacher's knowledge directly impacts students' results, improving the quality of mathematical discussions it's fundamental to be more knowledgeable on the content of this knowledge and how it can be developed, and the practice transformed. To achieve this, it is essential to focus on students' mathematical difficulties – and Algebraic Thinking is one of such themes. An example of such is the need to stop focusing on patterns that externalize the regularities and start focusing on the

[1] Doutor em Educação Matemática pela Universidade de Huelva (Espanha). Professor da Faculdade de Educação da Unicamp. E-mail: cmribas78@gmail.com. www.ciespmat.com.br

mathematical regularities themselves, as they are the ones generalizable. In this paper I present and discuss the core ideas leading to the need to stop focusing on patters and start understanding regularities and the content of Tasks for Teacher Education associated with developing Mathematics Teacher's Specialized Knowledge within the scope of Algebraic Thinking.

Keywords: Repetition regularities; algebraic thinking; tasks for teacher education; MTSK.

Introdução

A Álgebra nos Anos Iniciais, como é denominado nos documentos oficiais no Brasil[2], é algo que foi introduzido recentemente, por isso os professores não possuem experiências anteriores nem formação prévia. No contexto do trabalho que desenvolvemos e seguindo uma linha internacional que considera a centralidade de desenvolver o Pensamento matemático dos alunos, ao invés da nomenclatura da Base Nacional Comum Curricular (BNCC)[3], assumo explicitamente o entendimento de Pensamento Algébrico. Esta opção está associada também a considerar que, se falamos de Álgebra nos Anos Iniciais, teríamos de falar também de Álgebra em cada uma das etapas educativas seguintes e isso levaria a considerar diferentes 'Álgebras", o que me parece um equívoco matemático.

O Pensamento Algébrico – como qualquer forma de pensar – é algo que tem de ser desenvolvido e, portanto, não pode assumir como ponto de partida um conjunto de regras. Exigindo, dessa forma, que tenhamos de fazer o que ainda não foi feito e que, portanto, tenhamos de desenvolver formas de pensar e não de ensinar a fazer. Tipicamente, a prática do professor é centrada no tema dos Números e Operações prevalecendo o trabalho focado nas quatro operações básicas com os números naturais[4], o que se associa a um trabalho centrado na Aritmética. Uma mudança de foco se torna necessária para possibilitar que os alunos passem a focar a sua atenção

---

[2] BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. 4. ed. Brasília: MEC, 2018.
[3] BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. 4. ed. Brasília: MEC, 2018.
[4] Ver, por exemplo, Mandarino (2009) ou Mendonça et al., (2007).
MANDARINO, M.C.F. Que conteúdos da matemática escolar professores dos anos iniciais do ensino fundamental priorizam?. In: Gilda Guimarães; Rute Borba. (Org.). Reflexões sobre o ensino de matemática nos anos iniciais de escolarização. 1ed.Recife: SBEM, 2009, v. 1, p. 29-48.
MENDONÇA, T.M.; PINTO, S. M.; CAZORLA, I.; RIBEIRO, E. As estruturas aditivas nas séries iníciais do ensino fundamental: um estudo diagnóstico em contextos diferentes. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME**, v. 10, n. 2, pp. 219-239, 2007.

em entender a estrutura matemática envolvida em cada situação[5] e as variações e constâncias que permitem descrever essa estrutura e a forma como ela pode ser generalizada. Essa mudança de foco necessita direcionar a atenção para a atribuição de significado da generalização, o que não demanda obrigatoriamente o uso formal de variáveis e fórmulas[6] correspondendo às regularidades de repetição (usualmente denominados, de padrões) a contextos com potencial para entender essa generalização[7].

Pensamento Algébrico, por ser um tema matemático, é entendido como constituído por várias dimensões[8]. Considerando uma perspectiva de transversalidade dos tópicos matemáticos ao longo da escolaridade, uma das opções que assumimos é centrar a atenção na dimensão que se relaciona posteriormente com a formalização do entendimento das funções e das variações associadas – por ser este um tema em que os alunos dos Anos Finais possuem tipicamente dificuldades[9] e que, portanto, temos de desenvolver as formas de pensar matematicamente de modo precoce associada ao denominado Pensamento Funcional[10]. Um dos tópicos que potenciam desenvolver esse Pensamento Funcional desde a Educação Infantil refere-se às regularidades de repetição[11], que, tipicamente, são denominadas por “padrões de repetição”. Essa assunção foca a exteriorização e não a estrutura matemática – sendo esse um dos motivos que, inclusive, sustenta possíveis dificuldades dos alunos.

Considerando que existe uma relação direta entre as dificuldades dos alunos,

---

[5] MELLONE, M. The influence of theoretical tools on teachers’ orientation to notice and classroom practice: a case study. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 14, n. 4, 269-284, 2011.

[6] LANNIN, J.; TOWENSEND, B.; ARMER, N.: GREEN, S.; SCHNEIDER, J. developing meaning for algebraic symbols: Possibilities & Pitfalls, **Mathematics Teaching in the middle school**, v. 13, 8, 478-483, 2008.

[7] BILLINGS, E.; TIEDT, T.; SLATER, L. Algebraic thinking and pictorial growth patterns. *Teaching children Mathematics*, December2007/January 2008, p. 302-308.

RIVERA, F.; BECKER, J. Figural and numerical modes of generalization in Algebra, **Mathematics Teaching in the middle school**, 198-203, 2005.

[8] KAPUT, J. What is algebra? What is algebraic reasoning? Em J. Kaput; D. W. Car- raher; M. L. Blanton (Eds.), **Algebra in the early grades** (pp. 5–18). Erlbaum, 2008.

[9] JUSTULIN, A. M.; PEREIRA, F.F.; FERREIRA, A. S. Representação gráfica de funções: uma análise das principais dificuldades de alunos do Ensino Médio. **REnCiMa**, v. 10, n.6, p. 301-318, 2019.

MARKOVITS, Z.; EYLON, B.; BRUCKHEIMER, M. Dificuldades dos alunos com o conceito de função. In: COXFORD, A.F.; SHULTE, A. P. (Org.). **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual Editora, 1994. p. 49-69.

[10] KAPUT, J. What is algebra? What is algebraic reasoning? Em J. Kaput; D. W. Car- raher; M. L. Blanton (Eds.), **Algebra in the early grades** (pp. 5–18). Erlbaum, 2008.

[11] RIBEIRO, M. **Entendendo a estrutura matemática das regularidades de repetição como elemento central de atribuição de significado aos padrões**. Campinas, SP: Cognoscere, 2021b, v. 5, p. 124.

os seus resultados e o conhecimento do professor[12], torna-se essencial passar a considerar – e a conhecer mais e melhor – o conteúdo desse conhecimento do professor para que possamos melhorar a qualidade da prática e das discussões matemáticas com os alunos por meio de contextos formativos com esse fito. Esse conhecimento pode ser entendido de múltiplas formas, sendo que, no contexto do trabalho que desenvolvemos, assumimos que este possui uma natureza especializada tanto no âmbito do conhecimento matemático quanto pedagógico e, nesse sentido, assumimos a conceitualização do *Mathematics Teachers Specialized Knowledge*[13] – MTSK[14].

Uma vez que o conhecimento matemático especializado do professor não se desenvolve na prática[15], demandando contextos formativos com essa intencionalidade, torna-se essencial conceitualizar contexto que possibilita esse desenvolvimento. Para isso, temos desenvolvido uma abordagem especializada para a formação de professores que envolve preparar as denominadas Tarefas Formativas[16] que são compostas por três documentos: Tarefa para a Formação – TpF; documento do professor; documento do formador. Para cada encontro formativo, preparamos um desses conjuntos de documentos que formam a Tarefa Formativa. Por assumir nessa abordagem especializante, que pesquisa com um foco nas especificidades do conhecimento do professor, e formação que busca contribuir para melhora a qualidade das discussões matemáticas em sala de aula necessitam ocorrer de forma imbricada, no trabalho que desenvolvemos no CIEspMat[17], sempre temos

[12] GROSSMAN, P. L. **Learning to Practice: the design of clinical experience in teacher preparation**American Association of Colleges for Teacher Education and National Education Association, 2010.
NYE, B.; KONSTANTOPOULOS, S.; HEDGES, L. V. How large are teacher effects? **Educational Evaluation and Policy Analysis**, v. 26, n. 3, p. 237-257, 2004.

[13] Optamos por utilizar a nomenclatura em inglês por esta já ser reconhecida internacionalmente e a tradução poder acarretar uma dessignificação, que se encontra associada a cada uma das dimensões da conceitualização.

[14] CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; MONTES, M.; CONTRERAS, L. C.; FLORES-MEDRANO, E; ESCUDERO-ÁVILA, D.; VASCO, D.; ROJAS, N.; FLORES, P.; AGUILAR-GONZÁLEZ, A.; RIBEIRO, M.; MUÑOZ-CATALÃN, M. C. The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model, **Research in Mathematics Education**, v. 20, n. 3, p. 236-253, 2018.

[15] RIBEIRO C.M.; MELLONE, M.; JAKOBSEN, A. Prospective teachers' knowledge in/for giving sense to students' productions. In A. M. Lindmeier; A. Heinze (Eds.). **Atas do PME**. Kiel, Germany: PME, 2013, v. 4, p. 89-96.

[16] RIBEIRO, M.; ALMEIDA, A.; MELLONE, M. Conceitualizando tarefas formativas para desenvolver as especificidades do conhecimento interpretativo e especializado do professor. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 14, n. 35, p. 1-32, 2021.

[17] O CIEspMat é um grupo de Pesquisa e Formação que desenvolve trabalhos focados no desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor e futuro professor de e que ensina matemática – desde a Educação Infantil ao Ensino Médio. www.ciespmat.com.br

associada uma questão de pesquisa.

Considerando a agenda de pesquisa delineada no CIEspMat em trabalhos anteriores, investigamos o conhecimento especializado de futuros professores no âmbito da classificação[18] do paralelismo e perpendicularismo[19]; o conhecimento interpretativo de futuros professores da Educação Infantil e dos Anos Iniciais no âmbito da Aritmética[20]. Neste texto, apresento e discuto uma abordagem para as Tarefas Formativas para desenvolver o Pensamento Algébrico dos professores e, com esse fito, trago um exemplo de uma discussão em torno das regularidades de repetição que nos leva a entender que, se buscamos possibilitar que os alunos entendam matemática, o foco de atenção tem de estar nessas regularidades que permitem generalizar a estrutura matemática envolvida e não nos padrões que as exteriorizam.

Algumas discussões teóricas

Os resultados de pesquisa mostram que alunos e professores revelam dificuldades em diversos temas e tópicos matemáticos, por exemplo Geometria, Álgebra[21] e capacidades transversais, tais como seja a resolução e formulação de

---

[18] DOICHE, E.; ALMEIDA, A. R.; RIBEIRO, M. Conocimiento especializado del profesor de Educación Infantil en el ámbito de la clasificación en matemática en un contexto de formación continuada. **Revista Chilena de Educación Matemática**, v. 13, p. 103 - 115, 2021.

[19] COUTO, S.; RIBEIRO, M. Conhecimento Especializado de futuros professores da Educação Infantil e dos Anos Iniciais no âmbito do paralelismo entre retas. **Revista Eletrônica UNG**, v. 14, p. 75 - 85, 2019.

[20] Ver, por exemplo, Jakobsen et al. (2014).
JAKOBSEN, A.; RIBEIRO, C. M.; MELLONE, M. Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. **Nordic Studies in Mathematics Education**, v. 19, n. 3-4, 2014, p. 135-150.

[21] Ver, por exemplo, Azevedo e Borba (2013), Behr et al. (1993), Doiche, Almeida e Ribeiro (2020), Ferreira, Ribeiro e Ribeiro (2016), Ribeiro (2016), Kamii e Dominic (1998).
AZEVEDO, J.; BORBA, R. Construindo árvores de possibilidades virtuais: o que os alunos podem aprender discutindo relações combinatórias?. Revista Eletrônica de Educação (São Carlos), v. 7, p. 39-62, 2013.
BEHR, M. J.; HAREL, G.; POST, T.; LESH, R. Rational Numbers: Toward a Semantic Analysis-Emphasis on the Operator Construct. In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), **Rational Numbers: An Integration of Research**. NJ: Lawrence Erlbaum, 1993, p. 13-47.
DOICHE, E.; ALMEIDA, A. R.; RIBEIRO, M. Conocimiento especializado del profesor de Educación Infantil en el ámbito de la clasificación en matemática en un contexto de formación continuada. **Revista Chilena de Educación Matemática**, v. 13, p. 103 - 115, 2021.
FERREIRA, M.; RIBEIRO, A. J.; RIBEIRO, M. Álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental: primeiras reflexões à luz de uma revisão de literatura. **Revista Educação e Fronteiras on-line**. v. 6, p. 34 - 47, 2016.
KAMII, C.; DOMINICK, A. The harmful effects of algorithms in grades 1-4. In L. J. Morrow & M. J. Kenney (Eds), **The teaching and learning of algorithms in school mathematics**, Resto, V A: NCTM, 1998, p. 130-140.

problemas ou argumentação[22] ou medidas[23].

O fato de tendencialmente se trabalhar focando as quatro operações básicas envolvendo quantidades naturais conhecidas[24] leva a pelo menos duas problemáticas. Por um lado, não contribui sequer para que os alunos sejam detentores de um conhecimento numérico que lhes permita entender as operações[25] e, por outro lado, ao focar a atenção nas quantidades envolvidas e não nas relações que permitem entender a estrutura matemática envolvida,[26] impossibilita que se entendam as variações nessa estrutura que leva a generalizações.

Este foco prioritário nas discussões no âmbito da Aritmética, leva a uma dificuldade de entender as relações entre as quantidades e as operações que as envolvem, bem como as relações entre elementos de um mesmo conjunto e as correspondências entre elementos de conjuntos distintos.

A aprendizagem da Álgebra é uma das maiores dificuldades dos alunos[27] e a transição da Aritmética para a Álgebra é algo que não acontece de maneira natural e espontânea[28], sendo necessário estabelecer pontes entre essas áreas da matemática[29]. Essas dificuldades encontram-se associadas tipicamente à introdução

---

[22] RIBEIRO, C., M.; AMARAL, R. Early years prospective teachers' specialized knowledge on problem posing. In Beswick, K., Muir, T., & Wells, J. (Eds.). Proceedings of 39th Psychology of Mathematics Education Conference. Hobart, Australia: PME, 2015, v. 4, p. 81-88.
TICHÁ, M.; HOŠPESOVÁ, A. Developing teachers' subject didactic competence through problem posing. **Educational Studies in Mathematics**, v. 83, 133-143, 2013.
[23] COUTO, S.; RIBEIRO, M. Conhecimento Especializado de futuros professores da Educação Infantil e dos Anos Iniciais no âmbito do paralelismo entre retas. **Revista Eletrônica UNG**, v. 14, p. 75 - 85, 2019.
[24] Ver, por exemplo, Mandarino (2009) e Mendonça et al., (2007)
MANDARINO, M.C.F. Que conteúdos da matemática escolar professores dos anos iniciais do ensino fundamental priorizam?. In: Gilda Guimarães; Rute Borba. (Org.). **Reflexões sobre o ensino de matemática nos anos iniciais de escolarização**. 1ed.Recife: SBEM, 2009, v. 1, p. 29-48.
MENDONÇA, T.M.; PINTO, S. M.; CAZORLA, I.; RIBEIRO, E. As estruturas aditivas nas séries iníciais do ensino fundamental: um estudo diagnóstico em contextos diferentes. **RELIME**, v. 10, n. 2, pp. 219-239, 2007.
[25] KAMII, C.; DOMINICK, A. The harmful effects of algorithms in grades 1-4. In L. J. Morrow & M. J. Kenney (Eds), **The teaching and learning of algorithms in school mathematics**, Resto, V A: NCTM, 1998, p. 130-140.
[26] KAPUT, J. What is algebra? What is algebraic reasoning? Em J. Kaput; D. W. Car- raher; M. L. Blanton (Eds.), **Algebra in the early grades** (pp. 5–18). Erlbaum, 2008.
MASON, J. What makes 'Algebra' early? Em J. Cai e E. Knuth (Eds.), **Algebra in the Early Grades: A global dialogue from multiple perspectives,** Springer, p. 566-568, 2011.
[27] CAI, J.; KNUTH, E. **Early algebraization**. New York: Springer, 2007
[28] KIERAN, C.; PANG, J.; SCHIFTER, D.; NG, S. F. Early Algebra. Research into its Nature, its Learning, its Teaching. **PME 13**, p. 1-42, 2016.
MELLONE, M. The influence of theoretical tools on teachers' orientation to notice and classroom practice: a case study. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 14, n. 4, 269-284, 2011
[29] KAPUT, J. J. Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K–12 curriculum. Washington, DC: National Research Council, National Academy Press, p. 25-26, 1998.

Edição Especial – Vol 1, Nº 01 – 2021 –p.104 -134 – ISSN 1981- 478X

da simbologia formal (as letras!) sendo visto como o momento de ruptura com a matemática[30], pois é entendido como o momento em que a matemática deixa de fazer sentido – o que, na nossa perspectiva significa apenas que nunca o fez!

Considerando essa dificuldade dos alunos em entender Álgebra, assumimos a perspectiva de algo que sustenta esse entendimento Algébrico e que tem correspondência com as formas de pensar matematicamente[31], aqui, em contexto algébrico. Considera-se, assim, o Pensamento Algébrico, e não Álgebra, nos Anos Iniciais (ou na Educação Infantil) e este é entendido como o conhecimento que permite entender a estrutura matemática que sustenta cada uma das situações e como as relações entre os seus elementos (o que varia e como varia e o que se mantém constante e como essa constância ocorre – variação e constância) permitem uma generalização matemática, assumindo essa ideia de generalização um lugar central para possibilitar o desenvolvimento do Pensamento Algébrico[32]. Assim, desenvolver o Pensamento Algébrico associa-se a desenvolver o conhecimento que permite "ler a estrutura matemática presente e ir além desse contexto particular", fazendo uso de distintos registros de representação para uma mesma estrutura (por exemplo, gestual, verbal, pictórica, gráfica, numérica e simbólica[33].

Este entendimento focado na estrutura matemática e não na exteriorização dessa estrutura (os diferentes registros de representação que podem ser empregados ou diferentes representações dentro de um mesmo registro) leva à necessidade de uma discussão que obriga a uma mudança de foco de, por exemplo, "vamos trabalhar

---

KIERAN, C. The Learning and Teaching of School Algebra. In **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. (p. 390-419). New York: Macmillan Publishing Company 1992.

[30] FREITAS, J. L. M. Reflexões e Questionamentos sobre Pesquisa em Educação Algébrica. **Educação Matemática e Pesquisa**, v. 17, n. 3, 655-665, 2015

[31] National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). **Principles and standards for school mathematics**. Reston, VA: Author, 2000.

RIBEIRO, M. **Entendendo a estrutura matemática das regularidades de repetição como elemento central de atribuição de significado aos padrões**. Campinas, SP: Cognoscere, 2021b, v. 5, p. 124.

RIBEIRO, M. **Pensar Matematicamente envolvendo diferentes formas de ver e de contar e as conexões com o Pensamento Algébrico**. Campinas, SP: Cognoscere, 2021c, v. 4, p. 60.

[32] Ver, por exemplo, Blanton e Kaput (2005), Mason (1996) e Kieren (1992)

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 36, n. 5, p. 412–446, 2005.

KIERAN, C. The Learning and Teaching of School Algebra. In **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. (p. 390-419). New York: Macmillan Publishing Company 1992.

MASON, J. Expressing Generality and Roots of Algebra. Em: BERNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Eds.). **Approaches to Algebra.** Dordrecht: Springer, 1996. v. 18, p. 65–86

[33] RADFORD, L. Signs, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. In **CERME 6**, p. XXXIII–LIII, Lyon, França, 2009.

padrões de repetição ou vamos trabalhar sequências crescentes ou recursivas" para *"vamos desenvolver o entendimento das regularidades de repetição ou de crescimento".* Esta mudança de foco assume que é a estrutura matemática que é generalizável e não a exteriorização que se efetua dessa estrutura, pois para uma mesma estrutura temos infinitas generalizações.

Considerando o Pensamento algébrico como uma forma de pensar matematicamente em contextos com potencialidades algébricas, assumo que é, portanto, algo que não se ensina, mas que se desenvolve – como qualquer outra forma de pensar – e esse desenvolvimento tem de se iniciar na Educação Infantil, contribuindo, assim, para a evolução de formas de Pensamento cada vez mais sofisticadas. Nesse sentido, torna-se fundamental considerar também o Brincar com Intencionalidade matemática na Educação Infantil, sendo essa intencionalidade associada a possibilitar que as crianças entendam a estrutura matemática que permite descrever as suas brincadeiras (livres ou direcionadas). Esse entendimento desde a Educação Infantil torna mais natural as discussões matemáticas formais posteriormente no contexto dos tópicos com potencialidades algébricas – tópicos que, sendo usualmente abordados associados a objetivos imediatos de encontrar a resposta "única", podem estar envolvidos em situações de generalização matemática.

O Pensamento algébrico, como uma forma de pensar matematicamente, é um tema matemático e, portanto, constituído por vários tópicos matemáticos. Dependendo dos autores, consideram-se três ou quatro dimensões[34]. Aqui, considero três dimensões, pois assumo que são as fundamentais que sustentam esse desenvolvimento de forma plena: (i) Aritmética Generalizada; (ii) Modelação; (iii) Pensamento Funcional.

(i) Aritmética Generalizada: A Aritmética leva-nos para um ambiente envolvendo quantidades conhecidas e que se associa maioritariamente à contagem e aos algoritmos das operações que se abordam nos Anos Iniciais. A ideia de associar a generalização a essa Aritmética leva a uma mudança de foco de atenção: de

---

[34] Ver, por exemplo, Kaput (2008) ou Ponte, Branco e Matos (2009).
KAPUT, J. What is algebra? What is algebraic reasoning? Em J. Kaput; D. W. Car- raher; M. L. Blanton (Eds.), **Algebra in the early grades** (pp. 5–18). Erlbaum, 2008.
PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico**. Lisboa: DGIDC, 2009.

“encontra o resultado final” para uma perspectiva associada a entender as relações que sustentam a estrutura matemática existente em cada situação e as formas como podemos generalizar essa aritmética – não os resultados, mas os raciocínios e os procedimentos[35] Um exemplo de uma tarefa associada a esta dimensão está associado a objetivos voltados para desenvolver esse entendimento do número e das propriedades da decomposição em contexto de “contagem de distintas formas uma mesma quantidade conhecida”[36].

(ii) Modelação: A Modelação é entendida como uma componente do Pensamento Algébrico quando associada à resolução de problemas em que as quantidades envolvidas até podem ser conhecidas, mas a tarefa envolve uma forma especializada de pensar matematicamente, que se associa a desenvolver um entendimento das ideias base da generalização matemática. Os problemas necessitam, portanto, envolver condições que possibilitem estabelecer uma relação entre as quantidades envolvidas e ir variando essas quantidades de modo que entendamos essa relação e as implicações existentes na variação de quantidades quando a relação variacional se mantém.

Um exemplo de uma tarefa que se associa a esta dimensão do Pensamento Algébrico é o seguinte: Kamila e Evonete receberam R$ 410. Kamila recebeu R$ 100 a mais que Evonete. Quantos reais Evonete recebeu? Notemos que o foco aqui não é a resposta final, mas o raciocínio efetuado no processo de modelar, no entendimento das relações existentes entre as quantidades e na manutenção dessa relação independentemente da quantidade inicial envolvida.

(iii*) Pensamento Funcional*. Esta forma específica de Pensar Matematicamente é uma das componentes do Pensamento Algébrico e pode ser desenvolvida em contextos que favoreçam relações funcionais entre elementos de conjuntos disjuntos. Como o nome leva a supor, a formalização matemática ocorre associada ao trabalho no âmbito das funções, que, segundo a BNCC, deverá ocorrer no 7.º ano, mas, para que os alunos possam entender e não enfrentar as dificuldades típicas nesse âmbito,

---

[35] RIBEIRO, M. **Entendendo a estrutura matemática das regularidades de repetição como elemento central de atribuição de significado aos padrões**. Campinas, SP: Cognoscere, 2021b, v. 5, p. 124.

[36] RIBEIRO, M. **Pensar Matematicamente envolvendo diferentes formas de ver e de contar e as conexões com o Pensamento Algébrico**. Campinas, SP: Cognoscere, 2021c, v. 4, p. 60.

é essencial estimular essa ideia de relações funcionais vinculada ao entendimento da estrutura matemática.

Desenvolver o Pensamento Funcional associa-se, portanto, a criar o hábito mental de Pensar matematicamente em momentos propícios ao entendimento das estruturas matemáticas que sustentam as relações funcionais possíveis entre elementos de conjuntos disjuntos, mas dependentes, ou seja, em que o que ocorre nos elementos de um desses conjuntos é dependente do que ocorre no outro – associada tipicamente a "função". Envolve, na Educação Infantil e Anos Iniciais, situações que usualmente se associam a padrões de repetição[37] ou padrões/sequências de crescimento[38] É importante deixar claro aqui que, apesar de estes autores se referirem a padrões de repetição ou sequências de crescimento, pelo foco especializado que assumo e pela necessidade de desenvolver um entendimento matemático que seja generalizável (o que dizemos e fazemos hoje necessita ser válido amanhã), necessitamos mudar esse foco de atenção para a estrutura matemática das regularidades e do seu tipo (de repetição e de não repetição – crescente, decrescente) e não para a exteriorização dessas regularidades.

Considerando as duas mudanças de foco que se consideram fundamentais (de ensinar para desenvolver e de padrão para regularidade matemática) para que os alunos possam generalizar – essência do Pensamento Algébrico – é essencial clarificar que, por assumir que é a estrutura matemática que permite a generalização e não a sua exteriorização, o foco de atenção prioritário tem necessariamente de ser a regularidade matemática que sustenta a replicabilidade. Assim, padrão e sequências não se configuram como tópicos matemáticos, mas sim as regularidades (de repetição, (de)crescimento) que as sustentam, pois são elas que nos permitem

---

[37] LÜKEN, M. Patterning as a Mathematical Activity: An Analysis of Young Children's Strategies When Working with Repeating Patterns. Em: [s.l: s.n.]. p. 79–92.
MARKWORTH, K. A. Growing Patterns: Seeing beyond Counting. **Teaching Children Mathematics**, v. 19, n. 4, p. 254–262, nov. 2012.
WARREN, E.; COOPER, T. Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. **Educational Studies in Mathematics**, v. 67, n. 2, p. 171–185, 2008

[38] MARKWORTH, K. A. Growing Patterns: Seeing beyond Counting. **Teaching Children Mathematics**, v. 19, n. 4, p. 254–262, nov. 2012.
WARREN, E.; COOPER, T. Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. **Educational Studies in Mathematics**, v. 67, n. 2, p. 171–185, 2008
WILKIE, K. J.; CLARKE, D. M. Developing students' functional thinking in algebra through different visualisations of a growing pattern's structure. **Mathematics Education Research Journal**, v. 28, n. 2, p. 223–243, 2016.

determinar o elemento de qualquer ordem ou posição e que podem ser exteriorizadas de múltiplas formas[39] – números, formas geométricas, sons, cores, gestos, brinquedos, imagens – e associados a diversos recursos.

No caso concreto das regularidades de repetição (tópico que será discutido na Tarefa para a Formação), é essencial entender que estas se encontram usualmente associadas a exteriorizações por padrões pictóricos, numéricos, geométricos ou sonoros que possuem uma determinada estrutura que se repete. Os seus elementos nucleares são o *(i) elemento gerador mínimo (estrutura que se repete) e (ii) regularidade matemática* – como o elemento gerador mínimo se repete). Assim, uma mesma regularidade de repetição (e.g., de dois elementos) vai ser exteriorizada de infinitas formas para cada dupla de elementos que se considere, mas a estrutura matemática é sempre a mesma, visto que é replicável e generalizável para todos os seus elementos. Já no que se refere às regularidades que não são de repetição (crescimento ou decrescimento), correspondem ao que usualmente se denomina de sequências de crescimento, e seus elementos centrais sustentadores são a regularidade matemática, a sequência e termo geral[40].

Quando nos situamos no espaço de discussão do conhecimento do professor, podemos assumir uma perspectiva de generalidades[41], em que as discussões são válidas para qualquer área de conhecimento ou mesmo qualquer tópico dentro de uma mesma área, ou uma perspectiva que assume que, enquanto professores, nos cumpre um conhecimento especializado para ensinar cada uma das áreas de conhecimento e, em particular, cada tema e tópico que compõem essa área.

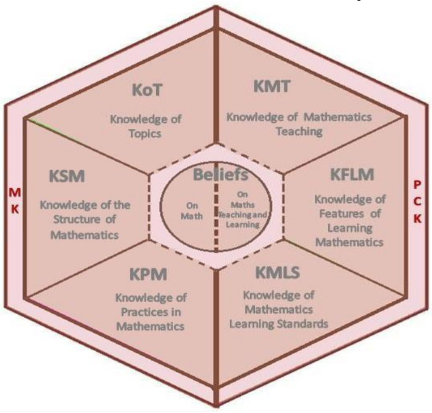
Assumo esta última perspectiva, entendendo esse conhecimento especializado segundo a conceitualização do *Mathematics Teachers Specialized Knowledge* – MTSK[42], que considera o conhecimento do professor como

---

[39] BORRALHO, A.; CABRITA, I.; PALHARES, P.; VALE, I. Os Padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra. Em I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro (Orgs), **Números e Álgebra** (pp. 193-211). Lisboa: SEM- SPCE, 2007.
RIBEIRO, M. **Entendendo a estrutura matemática das regularidades de repetição como elemento central de atribuição de significado aos padrões**. Campinas, SP: Cognoscere, 2021b, v. 5, p. 124.
[40] RIBEIRO, M. **Entendendo a estrutura matemática das regularidades de repetição como elemento central de atribuição de significado aos padrões**. Campinas, SP: Cognoscere, 2021b, v. 5, p. 124.
[41] RIBEIRO, M. Das Generalidades às Especificidades do Conhecimento do Professor que Ensina Matemática: Metodologias na Conceitualização (Entender e Desenvolver) do Conhecimento Interpretativo In: **Abordagens teóricas e metodológicas nas pesquisas em educação matemática**.1 ed. Brasília: SBEM, 2018, p. 167-185.
[42] CARRILLO, J. et al., The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model, **Research in Mathematics Education**, v. 20, n. 3, p. 236-253, 2018.

especializado tanto no domínio matemático como pedagógico. No MTSK, consideram-se, assim, dois domínios de conhecimento (Figura 1), cada um constituído por três subdomínios. No conhecimento matemático especializado, inclui-se o *Knowledge of Topics* (KoT), *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM) e *Knowledge of Practices in Mathematics* (KPM). Já no Conhecimento Pedagógico Especializado, encontram-se os subdomínios *Knowledge of Mathematics Teaching* (KMT), *Knowledge of Features of Learning Mathematics* (KFLM) *e Knowledge of Mathematics Learning Standards* (KMLS).

Figura 1 – Domínios do *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge – MTSK*



Fonte: Carrillo et al. (2018, p. 241)

Forma parte do nosso conhecimento enquanto professores no âmbito de cada um dos tópicos um conhecimento matemático que vai além de um saber fazer – mesmo que de várias formas distintas – e de o que os nossos alunos têm o direito de aprender e entender.

Uma das dimensões do nosso conhecimento especializado refere-se ao *Knowledge of Topics* (KoT) e inclui um conhecimento associado ao que se faz; a forma como se faz e a razão por que se faz de determinada forma, incluindo aqui o conhecimento sobre as características do resultado e conhecimento de distintos registros de representação para cada um dos distintos tópicos; e também um conhecimento que permita entender os fenômenos associados aos tópicos e às múltiplas possíveis definições equivalentes para um mesmo conceito. No âmbito do tópico de regularidades de repetição, inclui-se conhecer que regularidade, padrão e sequência se referem a elementos matemáticos distintos e que o fenômeno de generalização é algo transversal e central ao entendimento dessas dimensões; conhecer diferentes registros de representação para uma mesma regularidade de repetição; conhecer os procedimentos associados a efetuar uma generalização local e global; conhecer que só podemos considerar sequência de repetição após a indicação de uma determinada ordem de determinado elemento[43].

Para além de um conhecimento sobre o tópico específico que temos de abordar, é essencial conhecer as conexões que existem – e podem ser formuladas – entre esse tópico e outros dentro do mesmo tema ou de outros temas, correspondendo esse conhecimento ao denominado *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM). Como parte deste subdomínio de conhecimento do professor, cumpre-nos conhecer, entre outros (i) conexões de complexificação (conectam tópicos ensinados com outros que se irão abordar posteriormente, envolvendo uma projeção dos tópicos ensinados para tópicos futuros); (ii) conexões de simplificação (relação do tópico com tópicos anteriores, sendo uma retrospeção dos tópicos potenciada pelo entendimento dos tópicos anteriores); (iii) conexões transversais (característica em comum do tópico com tópicos mais simples ou complexos com os quais se relaciona e formas de pensamento que os relacionam); (iv) conexões auxiliares (envolvimento de um tópico em processos mais amplos como tópico ou elemento auxiliar).

No âmbito do tópico de regularidades de repetição[44], deverá formar parte do nosso conhecimento enquanto professores um conhecimento das conexões entre a infinidade de elementos de um padrão linear de repetição e a infinitude dos números inteiros e a noção de infinito; das conexões entre a existência de uma multiplicidade de padrões de repetição para uma mesma regularidade de repetição e as infinitas formas equivalentes de representar numericamente uma mesma quantidade ou das conexões entre a posição de determinado elemento na sequência de repetição e os números naturais.

---

[43] Para mais informações consultar Ribeiro (2021b)
RIBEIRO, M. **Entendendo a estrutura matemática das regularidades de repetição como elemento central de atribuição de significado aos padrões**. Campinas, SP: Cognoscere, 2021b, v. 5, p. 124.
[44] Ibidem nota 43.

Forma ainda parte do nosso conhecimento matemático especializado para o exercício da nossa prática profissional de ensino da matemática um conhecimento que sustenta a generalização, a prova e a abstração, que são elementos centrais no Pensar matematicamente e que formam parte do denominado *Knowledge of Practices in Mathematics* (KPM). Neste subdomínio de conhecimento, inclui-se (i) conhecer diferentes formas de demonstrar; (ii) diferentes critérios para que uma generalização seja válida; (iii) diferentes estratégias de resolução de problemas ou de modelagem matemática; (iv) o significado de definição, axioma ou teorema como elementos constituintes da matemática. Este conhecimento matemático sustenta a formulação das denominadas questões vencedoras que nos cumpre efetuar em cada tarefa de introdução de tópicos para que os alunos possam desenvolver as suas formas de Pensar matematicamente atentando para a estrutura matemática envolvida e buscando generalizações matemáticas.

No que concerne às regularidades de repetição, inclui-se neste subdomínio o conhecimento associado aos critérios utilizados para obtermos a generalização de uma regularidade ou de uma expressão que nos permita obter o elemento em qualquer posição de uma sequência de repetição.

Este conhecimento matemático sustenta a forma como entendemos e implementamos a nossa prática matemática, mas essa prática é exteriorizada não apenas pelas questões que efetuamos, mas também pela forma como elas são colocadas e em que situações, a fim de potenciar as aprendizagens matemáticas dos alunos. A seleção, a escolha e a preparação desses contextos e recursos – incluindo aqui as tarefas – levam à emergência de determinadas questões em detrimento de outras e moldam, também, a qualidade das discussões matemáticas que os alunos podem desenvolver e sustentam-se no denominado Conhecimento Pedagógico. Esse conhecimento pedagógico para possibilitar que os alunos entendam matemática e desenvolvam o seu pensar matematicamente está associado a cada um dos temas e tópicos específicos que temos de abordar e não é, portanto, um conhecimento geral de metodologias de ensino ou de técnicas pedagógicas de formas de organizar a sala de aula ou escrever na lousa. Consideram-se, também, três subdomínios neste nosso conhecimento pedagógico especializado enquanto professores, para efetuar com os nossos alunos discussões matematicamente potentes e adequadas.

Cumpre-nos, assim, um conhecimento relativo aos diferentes recursos e estratégias de ensino de cada um dos tópicos que nos permita equacionar quais os mais – ou menos – adequados em cada momento, de modo a alcançar o objetivo de aprendizagens matemáticas específicas associado a cada momento de prática – *Knowledge of Mathematics Teaching* (KMT).

Forma parte deste conhecimento também o conhecimento da sequenciação que poderá tornar as discussões mais profícuas bem como as melhores analogias e metáforas e como e quando empregá-las de forma adequada e matematicamente correta para maximizar o entendimento dos alunos e o desenvolvimento das suas formas de Pensar matematicamente. Este conhecimento pedagógico permite decidir quais os momentos mais adequados para que sejam efetuadas as questões vencedoras de modo a maximizar a qualidade da discussão matemática, considerando também como ponto de partida para essa decisão o que os alunos conhecem e como conhecem do tópico matemático[45]. Exemplos de conteúdo deste conhecimento no âmbito das regularidades de repetição incluem conhecer as potencialidades de utilizar diferentes signos, símbolos e elementos para representar uma mesma regularidade, exteriorizando distintos padrões; conhecer as potencialidades de efetuar a modelação das situações envolvendo a estrutura de repetição linear recorrendo a materiais não estruturados quer sejam os brinquedos dos alunos ou os próprios alunos, fazendo uso da posição do seu corpo (em pé/sentado) ou da roupa que trazem[46].

Porém, para que o professor possa equacionar diferentes estratégias para abordar os tópicos matemáticos, complementarmente a um conhecimento matemático, é requerido um conhecimento sobre como se aprende esse tópico bem como das distintas formas em que os alunos se relacionam com ele. Esse conhecimento é denominado de *Knowledge of the Features of Learning Mathematics* (KFLM) e inclui (i) as formas de interação dos alunos com cada um dos tópicos matemáticos, nomeadamente com relação aos processos e às estratégias

[45] JAKOBSEN, A.; RIBEIRO, C. M.; MELLONE, M. Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. **Nordic Studies in Mathematics Education**, v. 19, n. 3-4, 2014, p. 135-150.
[46] RIBEIRO, M. **Brincar com intencionalidade matemática – números, suas representações e entendimentos**. Curitiba: Appris, 2021a, p.123.

empregadas pelos alunos, sejam essas usuais ou não esperadas; à linguagem e ao vocabulário matemático usualmente empregado; (ii) as maiores dificuldades ou facilidades e os erros típicos que os alunos podem revelar com relação à aprendizagem de cada um dos tópicos; (iii) às concepções dos alunos sobre a matemática, bem como os seus principais interesses e expectativas em relação a cada um dos tópicos matemáticos específicos; (iv) as características de aprendizagem, pelos alunos, de cada um dos distintos tópicos matemáticos; (v) as teorias de aprendizagem pessoais ou institucionais. Este conhecimento no âmbito das regularidades de repetição inclui conhecer que os alunos têm dificuldades em efetuar generalizações, pois não têm tipicamente desenvolvida uma forma de pensar matematicamente ficando em nível do observável (concreto) e não efetuando a transição para o abstrato.

Toda a nossa prática profissional é guiada pelo conteúdo dos documentos oficiais de cada espaço em que nos encontramos, mas não devemos limitar a nossa prática a esses documentos, pois cumpre-nos um conhecimento que expanda essas informações curriculares. Assim, é essencial que sejamos detentores de um conhecimento do conteúdo do documento oficial que guia a elaboração dos currículos – e dos próprios currículos –, mas também de um conhecimento que inclua os últimos resultados de pesquisa sobre o ensino e as aprendizagens matemáticas de cada um dos temas e tópicos que nos cumpre abordar com as crianças ou alunos. Esse conhecimento do conteúdo dos documentos oficiais nacionais – e de outros países –, e das recomendações emergentes dos últimos resultados de pesquisa e das organizações da sociedade civil associa-se ao *Knowledge of Mathematics Learning Standards* (KMLS).

Inclui-se nesse conhecimento entender as limitações dos diferentes documentos oficiais. Esse conhecimento dos documentos oficiais deverá ser complementado com os resultados de pesquisas recentes e o que estes nos dizem relativamente ao ensino e à aprendizagem de cada tema e tópico. Inclui-se aqui conhecer, por exemplo, a importância de que os alunos entendam, primeiramente, o que se entende por regularidade e apenas depois, ou de forma associada, mas explícita, o trabalho associado ao entendimento dos padrões e das sequências como elemento centrais para desenvolver o Pensar matematicamente associado à generalização.

Quando pensamos uma formação especializante de professores, consideramos as especificidades da prática matemática do professor com os seus alunos; as especificidades da formação que necessita desenvolver o Conhecimento Especializado e Interpretativo do professor[47] para efetivar essas práticas especializadas. Desenvolver essas especificidades do conhecimento do professor demanda também, obviamente, um conhecimento especializado por parte do formador para implementar formações que alcancem esse objetivo de desenvolver esse conhecimento matemático e pedagógico especializado do professor, considerando também que, se queremos mudanças das práticas para a melhoria da qualidade das aprendizagens, necessitamos assumir que conhecimento pedagógico não se ensina, mas vive-se.

Com esse fito de contribuir para a melhoria da qualidade da formação e do Pensamento matemático dos alunos, pelo desenvolvimento do conhecimento especializado do professor, estamos desenvolvendo uma abordagem para a formação que considera um conjunto de etapas e de documentos envolvidos – as denominadas Tarefas Formativas[48]. Essas Tarefas são constituídas por um conjunto de três documentos que permitem estruturar uma formação especializante e que considera a pesquisa com foco no conhecimento do professor de forma imbricada.

A Tarefa Formativa é composta pelos três documentos[49]: (i) Tarefa para a Formação (TpF); (ii) documento do professor; e (iii) documento do formador.

*(i) Tarefa para Formação (*TpF) – corresponde à tarefa que vai sustentar as discussões no contexto formativo. Trata-se de uma tarefa que sempre parte de uma

---

[47] CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; MONTES, M.; CONTRERAS, L. C.; FLORES-MEDRANO, E; ESCUDERO-ÁVILA, D.; VASCO, D.; ROJAS, N.; FLORES, P.; AGUILAR-GONZÁLEZ, A.; RIBEIRO, M.; MUÑOZ-CATALÃN, M. C. The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model, **Research in Mathematics Education**, v. 20, n. 3, p. 236-253, 2018.
DI MARTINO, P.; MELLONE, M.; RIBEIRO, M. Interpretative Knowledge In: **Encyclopedia of Mathematics Education**.1 ed.: Springer International Publishing, 2020, p. 424-428.
JAKOBSEN, A.; RIBEIRO, C. M.; MELLONE, M. Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. **Nordic Studies in Mathematics Education**, v. 19, n. 3-4, 2014, p. 135-150.
[48] RIBEIRO, M.; ALMEIDA, A.; MELLONE, M. Conceitualizando tarefas formativas para desenvolver as especificidades do conhecimento interpretativo e especializado do professor. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 14, n. 35, p. 1-32, 2021.
[49] Ibidem nota 48.

situação da prática do professor (que pode ser prática de sala de aula, ou não, mas sempre está relacionada com o conhecimento específico para ensinar matemática) e busca possibilitar regressar a essa prática melhorada. Tipicamente, contém uma tarefa para os alunos (de introdução a algum tópico matemático) e um conjunto de questões direcionadas a discutir e desenvolver algumas das dimensões do conhecimento especializado ou interpretativo do professor.

(ii) Documento do professor – refere-se a uma síntese do conhecimento matemático especializado que se configura como necessário e suficiente para que o professor possa implementar a tarefa dos alunos. Este documento associa-se a um dos mais recentes resultados de pesquisa com foco no conhecimento dos alunos e do professor no âmbito do tópico específico em discussão e a sua elaboração associa-se à pesquisa que se realiza associada a cada TpF.

(iii) Documento do formador – corresponde ao documento destinado ao formador e que, sendo este já conhecedor e pesquisador do conhecimento interpretativo e especializado do professor, mesmo que em outro tópico, possa implementar a TpF e desenvolver a formação associada aos objetivos formativos delineados para formação específica.

Assumir estas ideias de especificidades também das Tarefas Formativas tem correspondência com a necessidade de um fazer diferente do que tem sido feito, possibilitando práticas pedagogicamente emocionantes, mas essencialmente matematicamente inovadoras. Para que essas práticas matematicamente inovadoras se tornem realidade, não é suficiente que nos contextos formativos a discussão seja pedagógica geral sobre como implementar uma tarefa com os alunos, mas demanda um foco especializante para desenvolver o conhecimento especializado dos professores e, para isso, a pesquisa com esse foco torna-se fundamental.

Uma tarefa para a formação para desenvolver o conhecimento especializado do professor no âmbito das regularidades de repetição

Quando pensamos em tarefas, estas podem ser entendidas sob uma multiplicidade de perspectivas e, nesse sentido, de modo a minimizar esses entendimentos, temos desenvolvido, no âmbito da pesquisa e formação que efetuamos no CIEspMat, uma estrutura generalizável para as tarefas que utilizamos nos contextos formativos que têm por objetivo desenvolver o MTSK[50] e o Conhecimento Interpretativo[51]. Essas são as denominadas Tarefas para a Formação (TpF) e a busca pela generalização da estrutura está relacionada também com a agenda de pesquisa que desenhamos de elaborar TpF para diferentes pesquisas focando em distintos temas e tópicos matemáticos para que possamos, também por essa via, contribuir com materiais para a formação e para a prática matemática do professor.

Uma das vertentes desse trabalho já foi iniciada com os livros da Coleção CIEspMat Formação[52], e pela forma imbricada que assumimos a pesquisa e a formação torna-se necessário que o formador seja também pesquisador com foco no MTSK ou no Conhecimento Interpretativo de modo a maximizar a qualidade das discussões formativas e o impacto na prática matemática do professor.

As TpF têm uma estrutura generalizável no trabalho que efetuamos e possuem tipicamente duas ou três partes e assumem como ponto de partida uma tarefa para os alunos (incluída dentro de um retângulo) em um determinado tópico matemático sobre o qual que a pesquisa mostra que os alunos revelam dificuldades.

A Parte Preliminar contém algumas questões que buscam aceder ao conhecimento do professor relativamente aquele que será o tópico de discussão da formação e sobre as suas práticas atuais nesse tópico – de modo a estabelecer um ponto de partida para as discussões posteriores e a possibilitar que possamos efetuar uma análise do desenvolvimento do conhecimento especializado pela formação.

A Parte I inicia-se com uma tarefa para os alunos e um conjunto de questões especificamente associadas ao conhecimento matemático e/ou pedagógico especializado do professor. Necessariamente, a primeira questão demanda que o professor responda à tarefa destinada aos alunos, pois esse é entendido como o

---

[50] CARRILLO, J.; et al. The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model, **Research in Mathematics Education**, v. 20, n. 3, p. 236-253, 2018.

[51] DI MARTINO, P.; MELLONE, M.; RIBEIRO, M. Interpretative Knowledge In: Encyclopedia of Mathematics Education.1 ed.: Springer International Publishing, 2020, p. 424-428.
JAKOBSEN, A.; RIBEIRO, C. M.; MELLONE, M. Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. **Nordic Studies in Mathematics Education**, v. 19, n. 3-4, 2014, p. 135-150.

[52] Esta é uma das Coleções direcionada para a prática matemática do professor e para a prática formativa do formador que busca desenvolver o conhecimento especializado do professor nas suas formações.

conhecimento matemático mínimo exigível ao professor para que possa implementar a tarefa com os seus alunos e, portanto, é o ponto de partida para as discussões na formação.

A Parte II da Tarefa para a Formação é incluída sempre que o foco de discussão é o desenvolvimento do denominado Conhecimento Interpretativo, sendo, nesse caso, denominada de Tarefa Interpretativa[53].

Considerando que todas as TpF se encontram associadas a uma questão de pesquisa, e muitas delas são, inclusive, conceitualizadas associadas a pesquisas em andamento, para a obtenção da versão final da TpF seguimos as etapas de validação de pesquisa. Assim, todas as TpF são validadas dentro do grupo de Pesquisa e Formação e, posteriormente, fora do grupo tanto por professores como por outros pesquisadores.

Apresento aqui um exemplo de uma TpF que tem associada a questão de pesquisa: *Que conhecimento matemático especializado revelam professores da Educação Infantil e Anos Iniciais em um contexto que busca desenvolver o seu conhecimento matemático especializado associado a entender a estrutura de repetição e a generalização associada*? De forma associada, persegue-se o objetivo formativo de desenvolver o conhecimento especializado do professor que permita implementar práticas matemáticas que foquem em entender a estrutura matemática de repetição, os elementos nucleares que permitem generalizar essa estrutura e as questões vencedoras associadas.

Esta TpF foi já implementada em vários contextos formativos (de formação inicial e continua) e forma, inclusive, parte de um dos livros da Coleção CIEspMat Formação[54] que se constitui como um material para a formação inicial e contínua de professores. Aqui, apresento a Parte I da Tarefa para a Formação que tem como objetivo formativo desenvolver o conhecimento especializado do (futuro) professor no âmbito das regularidades de repetição como parte do desenvolvimento do

[53] MELLONE, M.; RIBEIRO, M.; JAKOBSEN, A.; CAROTENUDO, G.; ROMANO, P.; PACELLI, T. Mathematics teachers' interpretative knowledge of students' errors and non-standard reasoning. **Research in Mathematics Education**, v. 22, n. 2, p. 154–167, 2020.

[54] RIBEIRO, M. **Entendendo a estrutura matemática das regularidades de repetição como elemento central de atribuição de significado aos padrões**. Campinas, SP: Cognoscere, 2021b, v. 5, p. 124.

Pensamento Algébrico e discuto o que se associa a cada uma das questões que a constituem.

Figura 2 – Tarefa para a Formação

Parte I

Tarefa[55]: Vamos entender a estrutura...

(Explique sempre o seu raciocínio, descrevendo o processo que usar para responder à questão. Pode fazê-lo usando esquemas, palavras, cálculos, ...)

Considere a figura seguinte:

a) Qual o próximo elemento? Justifique sua resposta;

b) Considere as imagens anteriores e represente-as:

(i) Usando as letras A e B;

(ii) Usando os algarismos 3 e 4;

c) Primeiro, representamos a imagem usando o cachorro e o boneco. Depois, as letras A e B e, depois, os algarismos 3 e 4. Comparando essas três formas de representar anteriores, quais as características que se mantêm e quais as que não se mantêm?

d) Se considerarmos que o cachorro mais à esquerda está na posição 1:

(i) Qual o elemento estará na posição 7? Justifique;

(ii) Qual o elemento estará na posição 12? Justifique;

(iii) Qual o elemento estará na posição 37? Justifique;

(iv) O João disse que na posição 41 está o cachorro. O João tem razão ou não? Por quê?

(v) Como podemos identificar qual a posição em que se encontra sempre um cachorro sem precisar contar de um em um? E um boneco? Justifique.

1. Considere a tarefa anterior:

a) Resolva a tarefa, por si mesmo, sem considerar um contexto de ensino.

b) Para que ano será mais adequada a tarefa? Justifique indicando uma habilidade da BNCC que mais se aproxime do "saber fazer" requerido na tarefa.

c) Quais podem ser as maiores dificuldades matemáticas dos alunos?

d) Que mudanças podemos efetuar na tarefa de modo a diminuir a demanda cognitiva em termos matemáticos? Justifique.

e) Que tipos de questões considera que devem ser efetuadas nas propostas deste tipo para que os alunos possam entender a generalização matemática?

Fonte: adaptado de Ribeiro (2021b)[56]

---

[55] RIBEIRO, M. **Pensar matematicamente com um foco nas conexões entre Medida, Números e Operações e Pensamento Algébrico nos Anos Iniciais – discutindo algumas tarefas para a sala de aula**. Campinas: Cognoscere, v. 1, 2022, p. 264.

[56] RIBEIRO, M. **Entendendo a estrutura matemática das regularidades de repetição como elemento central de atribuição de significado aos padrões**. Campinas, SP: Cognoscere, 2021b, v. 5, p. 124.

Note-se que a tarefa para os alunos parte de um contexto típico e usual nos materiais pedagógicos atuais (estas imagens podem ser construídas por alunos como parte da elaboração de uma história) – um conjunto de imagens que possuem uma determinada estrutura e uma questão de “qual o próximo” – e que os professores tendem a considerar “bastante fácil” e que aplicam com frequência, pois “*os alunos amam*”. A resposta esperada nesses contextos usuais é que o próximo será a repetição do elemento cachorro à direita, porém, há um conjunto de discussões matemáticas que necessitam ocorrer para que se entenda que essa é somente uma das respostas possíveis e não pelo motivo que usualmente os professores apresentam com maior frequência nos contextos formativos especializantes: “por que escrevemos da esquerda para a direita” ou “*por que sempre foi assim que vi*”.

A tarefa para o aluno - vamos entender a estrutura... persegue o objetivo de aprendizagens matemáticas de possibilitar que os alunos desenvolvam um conhecimento que lhes permita atentar para a estrutura repetitiva e entendê-la identificando a regularidade presente nessa estrutura infinita, de modo a poder descrever o que se se observa e a identificar em que posição estará determinado tipo de elemento após definida a posição inicial. A TPF busca possibilitar desenvolver o conhecimento especializado dos professores associado a efetuar generalizações matemáticas e desenvolver as formas de Pensar Algebricamente em contexto de regularidades de repetição.

O primeiro comando para o professor — *Resolva a tarefa por si mesmo* — buscando possibilitar que o professor se situe no contexto do tópico e, em particular possa pensar na tarefa específica que se pretende discutir. Pelas discussões posteriores, busca-se ampliar o conhecimento do professor possibilitando desenvolver o conteúdo do seu KSM de modo a possibilitar conexões com a reta numérica e a infinitude dos números inteiros – como ampliação dos naturais. Com a discussão de como implementar e discutir as questões b) e c) da tarefa para os alunos, pretende-se que o professor desenvolva o seu conhecimento que permite direcionar a atenção para a estrutura matemática de modo a podermos, posteriormente, entender como efetuar generalizações que sejam válidas em todos os padrões que tenham essa estrutura como elemento sustentador. Possibilita também uma discussão associada a entender o elemento gerador mínimo e a regularidade matemática. A questão d) busca possibilitar conexões entre os motivos matemáticos que levam à inexistência de um elemento à esquerda quando definimos o primeiro e o entendimento de o que diferencia reta de semirreta. Com a última questão, busca-se uma generalização matemática associada ao entendimento da estrutura matemática que sustenta qualquer regularidade com elemento mínimo gerador de dois elementos.

As questões para o professor b) a d) foram consideradas associadas a algumas das dimensões do MTSK e associam-se a conhecer os documentos oficiais (KMLS); possíveis maiores dificuldades dos alunos para responder a tarefa (KFLM) e mudanças na tarefa para simplificar as discussões matemáticas associadas efetuando conexões matemáticas com outros tópicos (KSM).

A última questão busca direcionar a atenção do professor para a possibilidade de generalizar o tipo de questões que se efetuam nas tarefas com esta estrutura matemática, possibilitando, assim, conhecer e implementar um "algoritmo pedagógico" que envolve as denominadas questões vencedoras – que necessitamos efetuar sempre em determinada ordem, não necessitando, no entanto de ser em momentos temporais imediatamente seguidos, cumprindo essa decisão ao professor considerando as especificidades do percurso das discussões que se desenvolvem na sua turma.

Notemos que, por considerar que conhecimento pedagógico não se ensina, vive-se e que esse conhecimento pedagógico para abordar o tópico de regularidades de repetição está diretamente relacionado com o conhecimento que o professor detém desse tópico (KoT), todas as discussões estão estruturadas para ocorrer de forma a desenvolver o conteúdo desse conhecimento de modo transversal. É importante salientar também que desenvolver modos de Pensar matematicamente, aqui em contexto algébrico (Pensamento Algébrico), demanda um foco de atenção distinto daquele que é tipicamente associando a "ensinar" e, por isso, assumo que Pensamento Algébrico – e quaisquer outras formas de Pensar matematicamente – não se ensina, mas desenvolve-se, em um processo contínuo e continuado no tempo.

Alguns comentários finais

Edição Especial – Vol 1, Nº 01 – 2021 –p.104 -134 – ISSN 1981- 478X

As Tarefas para Formação que conceitualizamos possuem uma estrutura generalizável que é constituída por três Partes e contêm uma tarefa para os alunos como ponto de partida para desenvolver o conhecimento especializado e interpretativo do professor. No entanto, o conteúdo de cada uma dessas TpF necessita estar sustentado nos mais recentes resultados de pesquisa que foque, por um lado, as maiores dificuldades dos alunos em cada um dos tópicos matemáticos e, por outro lado, o conhecimento do professor associado a cada um desses tópicos.

Esta TpF, em particular, considera que os professores não tiveram experiências anteriores enquanto alunos no âmbito do Pensamento Algébrico pelo que "*nem sequer possuem lembranças de como consideram aprenderam*" para poderem modelar e que as suas práticas, neste contexto, replicam o tipo de práticas que busca a resposta final sem uma preocupação em entender a multiplicidade de processos que podem ser desenvolvidos para obter essa resposta e com um olhar de "repetir o que tem sido feito", por isso durante as discussões formativas, para além de se coletarem informações para responder a questão de pesquisa associada a TpF, necessitamos desenvolver o conhecimento dos professores associado a cada um dos objetivos parciais específicos de cada uma das questões da TpF. A pesquisa mostra que os professores revelam o mesmo tipo de dificuldades dos seus alunos[57] de forma que necessitamos considerar a necessidade de desenvolver nos professores o conhecimento matemático que sustenta desenvolver as formas de Pensar em contextos algébricos – sendo necessários contextos com essa intencionalidade[58] – e, de forma integrada, o conhecimento pedagógico especializado associado a cada um dos tópicos matemáticos que temos de abordar para desenvolver o Pensamento Algébrico dos alunos.

Por serem tarefas conceitualizadas de forma a perseguir objetivos de desenvolvimento do conhecimento especializado ou interpretativo do professor para possibilitar práticas matemáticas transformadas, associadas a discussões matemáticas de elevado nível cognitivo, e por que esse conhecimento matemático

[57] NYE, B.; KONSTANTOPOULOS, S.; HEDGES, L. V. How large are teacher effects? **Educational Evaluation and Policy Analysis**, v. 26, n. 3, p. 237-257, 2004.

[58] RIBEIRO C.M.; MELLONE, M.; JAKOBSEN, A. Prospective teachers' knowledge in/for giving sense to students' productions. In A. M. Lindmeier; A. Heinze (Eds.). Atas do PME. Kiel, Germany: PME, 2013, v. 4, p. 89-96.

especializado não se desenvolve na prática de sala de aula, demandando contextos com essa intencionalidade[59], a implementação destas TpF demanda em si também um conhecimento especializado.

Assim, torna-se fundamental que o formador seja detentor de um conhecimento especializado para a sua prática profissional de formador, pois todos concordamos (acho!) que ninguém consegue propor práticas matematicamente inovadoras se não for, ele mesmo, detentor de um conhecimento que lhe permita implementar esse tipo de práticas de forma consistente. Nesse sentido, idealmente, o formador deverá estar envolvido em contextos de pesquisa com foco no MTSK e Conhecimento Interpretativo, de modo a deter um conhecimento teórico mais global sobre os princípios teóricos fundamentais que sustentam a conceitualização cada uma dessas tarefas. Porém, por esse não ser o contexto mais comum e por pretendermos possibilitar uma generalização dos procedimentos de pesquisa e abordagens pedagógicas, a cada uma destas TpF associam-se o documento do professor que contribui com o conhecimento matemático especializado mínimo para a implementação da tarefa e o documento para o formador que busca "minimizar o *gap* entre o conhecimento mobilizado, o conhecimento que "parece" ser revelado"[60]e aquele que se pretende desenvolver pela implementação da TpF.

Assim, considerando a Tarefa para a Formação como um recurso para o desenvolvimento do conhecimento do professor torna-se necessário desenvolver um instrumento que permita avaliar o desenvolvimento desse conhecimento e, dessa forma avaliar a formação e validar o conteúdo dos documentos associados (do professor e do formador) e os focos das discussões implementadas para a mudança da prática matemática.

Por serem tarefas que focam o desenvolvimento das especificidades do conhecimento matemático e pedagógico associado a cada um dos tópicos matemáticos, e este ser um foco ainda recente no âmbito das pesquisas em Educação Matemática, naturalmente são distintas daquelas que os próprios

---

[59] RIBEIRO C.M.; MELLONE, M.; JAKOBSEN, A. Prospective teachers' knowledge in/for giving sense to students' productions. In A. M. Lindmeier; A. Heinze (Eds.). **Atas do PME 2013**. Kiel, Germany: PME, 2013, v. 4, p. 89-96.

[60] RIBEIRO, M. Das Generalidades às Especificidades do Conhecimento do Professor que Ensina Matemática: Metodologias na Conceitualização (Entender e Desenvolver) do Conhecimento Interpretativo In: **Abordagens teóricas e metodológicas nas pesquisas em educação matemática**.1 ed. Brasilia: SBEM, 2018, p. 167-185.

formadores possam estar habituados a encontrar. Nesse sentido, idealmente ocorrerá uma formação de formadores especializados para que possam, posteriormente, implementar as TpF de forma a alcançar os objetivos de desenvolvimento de conhecimento que se encontram associados, e esta seja mais uma dimensão de contribuir para a melhoria da qualidade das aprendizagens matemáticas dos alunos e da prática matemática do professor[61].

Apesar de, ou talvez por, existirem em desenvolvimento várias pesquisas com foco no conhecimento especializado do professor e as Tarefas Formativas, são ainda escassas as que buscam identificar e entender quais as características das propostas para a formação de professores com a finalidade de promover o desenvolvimento das especificidades do conhecimento do professor[62] e como os professores percebem que o seu conhecimento foi desenvolvido e o impacto na sua prática. Assim, de forma a contribuir para fazer o que ainda não foi feito – pesquisa que nos ajude a desenhar formações que impactem, de forma sustentada, na mudança das práticas matemáticas dos professores que levam a que os alunos pensem matematicamente e, em consequência os seus resultados fiquem dentro do esperado – há algumas questões que podem guiar esse trabalho futuro referem-se, por exemplo, a:

(i) Que indicações incluir na tarefa para os alunos de modo que a posterior implementação em sala de aula possa ocorrer de forma próxima daquela que foi pensada e vivenciada por quem participou da formação?

(ii) Quais os aspetos mais críticos no conhecimento de (futuros) professores nos tópicos que se associam ao desenvolvimento do Pensamento Algébrico?

(iii) Quais as características fundamentais das TpF que contribuem para promover o desenvolvimento do conhecimento especializado do professor?

Agradecimentos

[61] RIBEIRO, M. Discutindo o conhecimento especializado do formador de professores de e que ensinam Matemática – um exemplo focando Tarefas para a Formação In: **Formação de professores que ensinam matemática: processos, desafios e articulações com a educação básica**.1 ed.São Paulo: SBEM, 2020, v. 1, p. 241-261.

[62] Ibidem.

O presente trabalho forma parte do projeto de pesquisa financiado pelo CNPq “Desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor e suas relações com as Tarefas para a Formação no âmbito da Medida, e do Pensamento Algébrico, Geométrico e Estatístico” (404959/2021-0).

Referências

AZEVEDO, J.; BORBA, R. Construindo árvores de possibilidades virtuais: o que os alunos podem aprender discutindo relações combinatórias? **Revista Eletrônica de Educação** (São Carlos), v. 7, p. 39-62, 2013.

BEHR, M. J.; HAREL, G.; POST, T.; LESH, R. Rational Numbers: Toward a Semantic Analysis-Emphasis on the Operator Construct. In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), Rational Numbers: An Integration of Research. NJ: Lawrence Erlbaum, 1993, p. 13-47.

BILLINGS, E.; TIEDT, T; SLATER, L. Algebraic thinking and pictorial growth patterns. **Teaching children Mathematics**, Dezembro 2007/Janeiro 2008, p. 302-308, 2008.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 36, n. 5, p. 412–446, 2005.

BORRALHO, A.; CABRITA, I.; PALHARES, P.; VALE, I. Os Padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra. Em I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro (Orgs), **Números e Álgebra** (pp. 193-211). Lisboa: SEM- SPCE, 2007.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. 4. ed. Brasília: MEC, 2018.

CAI, J.; KNUTH, E. **Early algebraization**. New York: Springer, 2007.

CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; MONTES, M.; CONTRERAS, L. C.; FLORES-MEDRANO, E; ESCUDERO-ÁVILA, D.; VASCO, D.; ROJAS, N.; FLORES, P.;

AGUILAR-GONZÁLEZ, A.; RIBEIRO, M.; MUÑOZ-CATALÃN, M. C. The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model, **Research in Mathematics Education**, v. 20, n. 3, p. 236-253, 2018.

COUTO, S.; RIBEIRO, M. Conhecimento Especializado de futuros professores da Educação Infantil e dos Anos Iniciais no âmbito do paralelismo entre retas. **Revista Eletrônica UNG**, v. 14, p. 75 - 85, 2019.

DI MARTINO, P.; MELLONE, M.; RIBEIRO, M. Interpretative Knowledge In: **Encyclopedia of Mathematics Education**.1 ed.: Springer International Publishing, 2020, p. 424-428.

DOICHE, E.; ALMEIDA, A. R.; RIBEIRO, M. Conocimiento especializado del profesor de Educación Infantil en el ámbito de la clasificación en matemática en un contexto de formación continuada. **Revista Chilena de Educación Matemática**, v. 13, p. 103 - 115, 2021.

FERREIRA, M.; RIBEIRO, A. J.; RIBEIRO, M. Álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental: primeiras reflexões à luz de uma revisão de literatura. **Revista Educação e Fronteiras Online**. v.6, p.34 - 47, 2016.

FREITAS, J. L. M. Reflexões e Questionamentos sobre Pesquisa em Educação Algébrica. **Educação Matemática e Pesquisa**, v. 17, n. 3, 655-665, 2015

GROSSMAN, P. L. **Learning to Practice: the design of clinical experience in teacher preparation**American Association of Colleges for Teacher Education and National Education Association, 2010.

JAKOBSEN, A.; RIBEIRO, C. M.; MELLONE, M. Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. **Nordic Studies in Mathematics Education**, v. 19, n. 3-4, 2014, p. 135-150.

JUSTULIN, A. M.; PEREIRA, F.F.; FERREIRA, A. S. Representação gráfica de funções: uma análise das principais dificuldades de alunos do Ensino Médio. **REnCiMa**, v. 10, n.6, p. 301-318, 2019.

KAMII, C.; DOMINICK, A. The harmful effects of algorithms in grades 1-4. In L. J. Morrow & M. J. Kenney (Eds), **The teaching and learning of algorithms in school mathematics**, Resto, V A: NCTM, 1998, p. 130-140.

KAPUT, J. J. Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by “algebrafying” the K–12 curriculum. Washington, DC: National Research Council, National Academy Press, p. 25-26, 1998.

KAPUT, J. What is algebra? What is algebraic reasoning? Em J. Kaput; D. W. Carraher; M. L. Blanton (Eds.), **Algebra in the early grades** (pp. 5–18). Erlbaum, 2008.
KIERAN, C. The Learning and Teaching of School Algebra. In **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. (p. 390-419). New York: Macmillan Publishing Company 1992.

KIERAN, C.; PANG, J.; SCHIFTER, D.; NG, S. F. Early Algebra. Research into its Nature, its Learning, its Teaching. **PME 13**, p. 1-42, 2016.

LANNIN, J.; TOWENSEND, B.; ARMER, N.; GREEN, S.; SCHNEIDER, J. Developing meaning for algebraic symbols: Possibilities & Pitfalls, **Mathematics Teaching in the middle school**, v. 13, n. 8, p. 478-483, 2008.

LÜKEN, M. Patterning as a Mathematical Activity: An Analysis of Young Children’s Strategies When Working with Repeating Patterns. Em: [s.l: s.n.]. p. 79–92.

MANDARINO, M.C.F. Que conteúdos da matemática escolar professores ods anos iniciais do ensino fundamental priorizam?. In: Guimarães, G.; Borba, R. (Org.). **Reflexões sobre o ensino de matemática nos anos iniciais de escolarização**. 1ed.Recife: SBEM, 2009, v. 1, p. 29-48.

MARKOVITS, Z.; EYLON, B.; BRUCKHEIMER, M. Dificuldades dos alunos com o conceito de função. In: COXFORD, A.F.; SHULTE, A. P. (Org.). **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual Editora, 1994. p. 49-69.

MARKWORTH, K. A. Growing Patterns: Seeing beyond Counting. **Teaching Children Mathematics**, v. 19, n. 4, p. 254–262, 2012.
MASON, J. Expressing Generality and Roots of Algebra. Em: BERNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Eds.). **Approaches to Algebra.** Dordrecht: Springer, 1996. v. 18, p. 65–86

Mason, J. What makes 'Algebra' early? En J. Cai & E. Knuth (Eds.), **Algebra in the Early Grades: A global dialogue from multiple perspectives,** Springer, p. 566-568, 2011.

MELLONE, M. The influence of theoretical tools on teachers' orientation to notice and classroom practice: a case study. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 14, n. 4, 269-284, 2011.

MELLONE, M.; RIBEIRO, M.; JAKOBSEN, A.; CAROTENUDO, G.; ROMANO, P.; PACELLI, T. Mathematics teachers' interpretative knowledge of students' errors and non-standard reasoning. **Research in Mathematics Education**, v. 22, n. 2, p. 154–167, 2020.

MENDONÇA, T.M.; PINTO, S. M.; CAZORLA, I.; RIBEIRO, E. As estruturas aditivas nas séries iníciais do ensino fundamental: um estudo diagnóstico em contextos diferentes. **RELIME**, v. 10, n. 2, p. 219-239, 2007.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Author, 2000.

NYE, B.; KONSTANTOPOULOS, S.; HEDGES, L. V. How large are teacher effects? **Educational Evaluation and Policy Analysis**, v. 26, n. 3, p. 237-257, 2004.
PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico**. Lisboa: DGIDC, 2009.

RADFORD, L. Signs, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. In **CERME 6**, p. XXXIII–LIII, Lyon, France, 2009.

RIBEIRO C.M.; MELLONE, M.; JAKOBSEN, A. Prospective teachers' knowledge in/for giving sense to students' productions. In A. M. Lindmeier; A. Heinze (Eds.). **PME 13**. Kiel, Germany: PME, 2013, v. 4, p. 89-96.

RIBEIRO, C., M.; AMARAL, R. Early years prospective teachers' specialized knowledge on problem posing. In Beswick, K., Muir, T., & Wells, J. (Eds.). **Proceedings of PME 39**. Hobart, Australia: PME, 2015, v. 4, p. 81-88.

RIBEIRO, M. **Brincar com intencionalidade matemática - números, suas representações e entendimentos**. Curitiba: Appris, 2021a p.123.

RIBEIRO, M. Das Generalidades às Especificidades do Conhecimento do Professor que Ensina Matemática: Metodologias na Conceitualização (Entender e Desenvolver) do Conhecimento Interpretativo In: **Abordagens teóricas e metodológicas nas pesquisas em educação matemática**.1 ed. Brasilia: SBEM, 2018, p. 167-185.

RIBEIRO, M. Discutindo o conhecimento especializado do formador de professores de e que ensinam Matemática – um exemplo focando Tarefas para a Formação In: **Formação de professores que ensinam matemática: processos, desafios e articulações com a educação básica**.1 ed.São Paulo: SBEM, 2020, v.1, p. 241-261.

RIBEIRO, M. **Entendendo a estrutura matemática das regularidades de repetição como elemento central de atribuição de significado aos padrões**. Campinas, SP: Cognoscere, 2021b, v. 5, p. 124.

RIBEIRO, M. **Pensar matematicamente com um foco nas conexões entre Medida, Números e Operações e Pensamento Algébrico nos Anos Iniciais – discutindo algumas tarefas para a sala de aula**. Campinas: Cognoscere, v. 1, 2022, p. 264.

RIBEIRO, M. **Pensar Matematicamente envolvendo diferentes formas de ver e de contar e as conexões com o Pensamento Algébrico**. Campinas, SP: Cognoscere, 2021c, v. 4, p. 60.

RIBEIRO, M.; ALMEIDA, A.; MELLONE, M. Conceitualizando tarefas formativas para desenvolver as especificidades do conhecimento interpretativo e especializado do professor. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 14, n. 35, p. 1-32, 2021.

RIVERA, F.; BECKER, J. Figural and numerical modes of generalization in Algebra, **Mathematics Teaching in the middle school**, 198-203, 2005.

TICHÁ, M.; HOŠPESOVÁ, A. Developing teachers' subject didactic competence through problem posing. **Educational Studies in Mathematics**, v. 83, p. 133-143, 2013.

WARREN, E.; COOPER, T. Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. **Educational Studies in Mathematics**, v. 67, n. 2, p. 171–185, fev. 2008.

WILKIE, K. J.; CLARKE, D. M. Developing students' functional thinking in algebra through different visualisations of a growing pattern's structure. **Mathematics Education Research Journal**, v. 28, n. 2, p. 223–243, 1 jun. 2016.

Recebido em: 16/01/2021
Aprovado em: 27/06/2024