ReBECEM Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática

PROPOSTA E ANÁLISE DE UMA ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA PARA O ENSINO DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS VIA PROVAS E DEMONSTRAÇÃO

PROPOSAL AND ANALYSIS OF A DIDACTIC ORGANIZATION FOR THE GEOMETRIC CONCEPTS TEACHING BY TESTS AND DEMONSTRATION

Saddo Ag Almouloud[1]

Maridete Brito Ferreira[2]

Resumo: Este artigo é um recorte de uma pesquisa maior que analisa uma proposta didática, cujas tarefas articulam provas e demonstrações, como alternativa metodológica para minimizar as dificuldades relacionadas ao tópico 'quadriláteros', em um curso de licenciatura em Matemática. Essas tarefas envolvem construções geométricas em um ambiente de papel e lápis, em que os alunos são solicitados a construir figuras geométricas e justificar matematicamente as técnicas utilizadas. Em uma parte das tarefas propostas, solicitava-se cumpri-las por meio de um raciocínio hipotético-dedutivo. Neste texto, apresentamos uma análise a priori de algumas das tarefas que não puderam ser experimentadas, mas que faziam parte do rol de situações propostas na investigação supracitada. A análise vislumbrada apoia-se, principalmente, na Teoria Antropológica do Didático (TAD) e na concepção de prova e demonstração. Nas análises que propusemos, além da TAD, as fases exploratórias das diferentes tarefas e a articulação entre os registros de representação (tratamento e conversão) nos permitiram mostrar que não basta o aluno se basear apenas na apreensão perceptiva para fazer uma validação formal das afirmações tecidas nas diferentes tarefas. É necessário que se explore, principalmente as apreensões operatórias e discursivas da figura para vislumbrar caminhos que permitem a construção de provas intelectuais.

Palavras-chave: Prova; Demonstração; Geometria; Quadriláteros; Análise a priori.

Abstract: This article is a clipping of a larger survey that analyzes a didactic proposal whose tasks articulate proof and demonstrations as a methodological alternative to minimizing the difficulties related to the topic ' quadrilaterals ' in a bachelor's degree course in mathematics. These tasks involve geometric constructs, in a paper and pencil environment, in which students are asked to construct geometric figures and to justify mathematically the techniques used. In a part of the proposed tasks, it was requested to fulfil them by a hypothetical-deductive reasoning. In this text, we presented a priori analysis of some of the tasks that could not be experienced, but which were part of the list of situations proposed in the aforementioned investigation. The envisaged analysis is primarily supported by the anthropological theory of the didactic (ATD) and the conception of proof and demonstration. In the analysis we have proposed, beyond the ATD, the exploratory phases of the different tasks, the articulation between semiotic register representation (treatment and conversion) allowed us to show that it is not enough that student only supports the perceptual apprehension to make formal validation of the affirmations woven in the different tasks. It is necessary to explore, mainly, the operative seizures and discursive of the figure to glimpse paths that allow the construction of intellectual evidence.

Keywords: Proof; Demonstration; Geometry; Quadrilaterals; A priori analysis.

[1]Doutor em Mathematiques et applications pela Universidade de Rennes I – França (UR1). Professor Assistente da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC), São Paulo, São Paulo, Brasil. E-mail: saddoag@gmail.com

[2]Doutora em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC). Professora Assistente da Universidade do Estado da Bahia (UNEB), Alagoinhas, Bahia, Brasil. E-mail: marideteferreira@gmail.com

1 Introdução

Este artigo é um recorte de uma tese de doutorado da segunda autora, sobre estudos de provas e demonstração em um curso de licenciatura em Matemática. Investiga-se uma proposta didática cujas tarefas articulam provas e demonstrações como alternativa metodológica para minimizar as dificuldades relacionadas ao tópico ‘quadriláteros’. As tarefas envolvem construções geométricas em um ambiente de papel e lápis em que os alunos são solicitados a construir figuras geométricas e justificar matematicamente as técnicas utilizadas.

Neste texto, apresentamos uma análise a priori de algumas das tarefas que não puderam ser experimentadas, mas que faziam parte do rol de atividades propostas na investigação supracitada. Focalizamos nossa atenção nas tarefas relativas a provas e demonstrações envolvendo o conteúdo ‘quadriláteros’. Apoiados na Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1999), analisamos as situações apresentadas tendo como foco as definições e as demonstrações nos processos de resolução. Nossa análise também foi fundamentada na tipologia de provas em matemática (BACHEFF, 2000, 2010), na Teoria dos Registros de Representações Semióticas (DUVAL, 1995) e nas diferentes apreensões das figuras desenvolvidas pelo mesmo autor.

Desse modo, as reflexões aqui tecidas são oriundas de um trabalho teórico-metodológico que se debruça sobre provas e demonstrações em matemática, mais especificamente em geometria. O objeto matemático que serviu de base de apoio é o conteúdo ‘quadriláteros’. O que é quadrilátero nesta pesquisa? No próximo item daremos uma resposta a esta questão.

2 Objeto matemático: o quadrilátero

Elegemos o conteúdo “quadriláteros” por entendermos que este propicia um campo fértil para discutir questões que envolvem provas e demonstrações, uma vez que as relações entre as propriedades dos quadriláteros permitem trabalhar demonstrações e abordar diversos conteúdos da geometria plana, tais como a congruência de triângulos.

A definição de quadrilátero é apresentada na educação básica, logo nos primeiros anos do ensino fundamental, sendo que no sexto ano é desenvolvida sua sistematização. No oitavo ano propõe-se as demonstrações das propriedades dos quadriláteros. Espera-se que no ensino médio os alunos já dominem este tópico. No entanto, a literatura e a nossa experiência confirmam que os alunos de licenciatura em matemática apresentam problemas conceituais relativos aos quadriláteros, dificuldades em sua identificação e no estabelecimento de relações entre os quadriláteros notáveis.

Compreendendo a importância da definição em matemática para o desenvolvimento do pensamento geométrico, é imprescindível que seja feita uma análise de tarefas relacionadas às definições dos quadriláteros. No bojo desta observação, fizemos apelo a Bongiovanni (2004), que apresenta quatro definições distintas para quadriláteros notáveis, as quais admitem relações distintas entre si, dependendo da classificação adotada. As classificações apresentadas pelo autor provêm de Euclides, Legendre e Hadamard.

Segundo Bongiovanni (2004), Legendre apresenta uma classificação de quadriláteros mais rigorosa e menos intuitiva. Ele caracteriza os quadriláteros da seguinte forma: O *quadrado* tem lados iguais e ângulos retos; O *retângulo* tem ângulos retos sem ter os lados iguais; O *losango* tem lados iguais sem que os ângulos sejam retos; O *paralelogramo* tem lados opostos paralelos. Pela definição de Legendre, o quadrado não é um retângulo e não é um losango, porém todos eles são paralelogramos. Também podemos observar que os quadriláteros que Euclides chama de oblongo, rombo e romboide passaram a se denominar respectivamente retângulo, losango e paralelogramo.

Segundo Bongiovanni (2004) apud Ferreira (2016, p.105),

> Hadamard caracterizou os quadriláteros notáveis de maneira mais ampla: *Quadrado* é um quadrilátero que tem todos os lados iguais e todos os ângulos iguais; *Retângulo* é um quadrilátero que tem todos os ângulos iguais e, consequentemente, retos; *Losango* é um quadrilátero que tem os quatro lados iguais; *Paralelogramo* é um quadrilátero que tem os quatro lados paralelos dois a dois.

De acordo com a definição de Hadamard, um quadrado também é retângulo e losango, ao passo que o quadrado, o retângulo e o losango são todos paralelogramos. A caracterização de Hadamard (Figura 1) é a que hoje consta nos livros didáticos.

Figura 1: Relações ente os quadriláteros, segundo Hadamard
Fonte: Ferreira (2016, p.105)

Quanto à definição de trapézio, esta causa dúvida até entre professores. Duas definições são consideradas: *Trapézio* é um quadrilátero em que dois lados opostos são paralelos; *Trapézio* é um quadrilátero em que exatamente dois lados opostos são paralelos.

Segundo a primeira definição, o paralelogramo é um trapézio, o que pode causar dúvidas em alunos e professores (MAIOLI, 2001; SILVA, 2007) pela ênfase dada à representação figural e não às propriedades do objeto. De modo geral, as representações de trapézio que os livros didáticos trazem são variações das que constam na Figura 2.

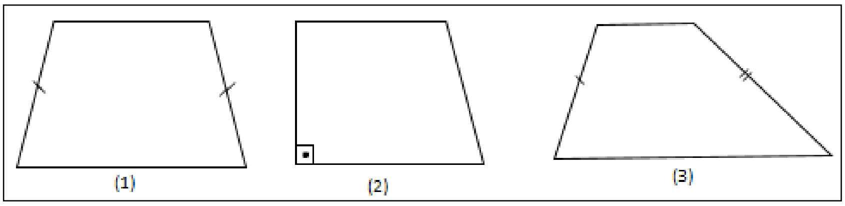

Figura 2: Representações de trapézios habitualmente encontradas em livros didáticos.
Fonte: Ferreira (2016, p.105)

De acordo com Ferreira (2016, s. p),

> A depender da definição de trapézio adotada, é necessário haver coerência com as demais definições adotadas e propriedades enunciadas. Um caso que pode gerar incoerência é a definição de trapézio isósceles e de suas propriedades. Ao definir este tipo de trapézio como sendo aquele que apresenta dois lados congruentes, não podemos assumir que os ângulos de suas bases e suas diagonais sejam congruentes, uma vez que o paralelogramo seria um trapézio isósceles que não satisfaz tais propriedades.

Bongiovanni (2010, p.10) propõe uma definição de trapézio isósceles que seria coerente com as propriedades que já estão incorporadas por alunos e professores: "*Trapézio isósceles é um trapézio que tem um único par de lados opostos congruentes*". Ao assumir esta definição, excluímos os paralelogramos da lista dos trapézios isósceles.

Do ponto de vista matemático, o conteúdo "quadriláteros" permite explorar um número significativo de propriedades geométricas que possibilitam a resolução de diversos problemas. Viabiliza também a resolução de problemas com o uso de régua e compasso, focando o levantamento de conjecturas e favorece a exploração de teoremas, teoremas recíprocos, demonstrações e diferentes registros de representação.

Diante do que foi abordado neste tópico, observamos a relevância de analisar as noções de "provas" e "demonstração".

3 Fundamentos

Apresentamos neste tópico, os constructos teóricos que fundamentarão nossas análises a priori.

3.1 As concepções de prova e de demonstração adotadas neste estudo

Os termos 'demonstração', 'prova', 'prova formal' e 'prova rigorosa' são vistos, geralmente, como sinônimos pelos matemáticos, e nem sempre discutem seus significados nem se ocupam em defini-los. No entanto, os termos 'prova' e 'demonstração' não são sinônimos, e para nós eles podem assumir diferentes significados. Alguns pesquisadores em Educação Matemática fazem a distinção entre provar e demonstrar em matemática. Entre eles, podemos citar Balacheff (2004), que considera que a falta de esclarecimento quanto ao significado do termo 'prova' pode prejudicar a comunicação entre pesquisadores em educação matemática. Balacheff (2000) distingue os termos 'explicação', 'prova' e 'demonstração'. Ele afirma que:

- *Explicação:* é um discurso que visa tornar inteligível o caráter de verdade, adquirido pelo locutor, de uma proposição ou de um resultado, os quais podem ser discutidos, refutados ou aceitos.
- *Prova:* é uma explicação aceita por dada comunidade em dado momento. Essa decisão pode ser objeto de um debate voltado a determinar um sistema de validação comum aos interlocutores.
- *Demonstração:* é um tipo de prova dominante em matemática, com uma forma particular. Trata-se de uma série de enunciados que se organizam segundo um conjunto bem definido de regras.

A distinção entre os significados de demonstração e prova implica aceitar outras produções de alunos para estabelecer a validade de uma afirmação. Neste artigo, adotaremos os termos ‘prova’ e “demonstração no sentido Balacheff (2000).

De acordo com Ferreira (2016, p.44), “O fato de aceitar outras formas de provas produzidas pelos alunos não minimiza a importância do papel da demonstração para o ensino da matemática”. Balacheff (2010) corrobora este fato e considera que não se pode aprender matemática sem aprender demonstração:

> [...] a prova matemática tem características específicas, entre elas um tipo formal de texto [...], uma organização específica e uma robustez indiscutível uma vez sintaticamente corretas. Essas características deram à matemática a reputação de ter práticas excepcionalmente rigorosas em relação a outras disciplinas, práticas que não são socialmente determinadas, mas inerentes à natureza da própria matemática (BALACHEFF, 2010 apud FERREIRA, 2016, p.45).

Muitos alunos recorrem a exemplos para justificar resultados. Valorizando esse tipo de produção dos alunos, Balacheff (2000, apud FERREIRA, 2016, p.46) distingue dois tipos de provas: as pragmáticas, “que têm o recurso à ação real ou apresentações” (exemplos, desenhos) e as conceituais, “que não envolvem ação e são caracterizadas por formulações de propriedades e as relações entre elas”. Em ambas, Balacheff (1988) identifica níveis de prova, assim classificados:

> - Empirismo ingênuo: Consiste em assegurar a validade de uma proposição após verificar para alguns casos. É considerado uma das primeiras formas de processo de generalização.
> - Experimento crucial: Consiste em afirmar a validade de uma proposição após a verificação para um caso especial, para o qual se assume que, se funciona para este, então funcionará sempre.
> - Exemplo genérico: Descreve o processo de verificação de uma proposição após efetuar operações ou transformações sobre um objeto na qualidade de representante característico de uma classe.
> - Experimento de pensamento: Invoca a ação, interiorizando-a, mas afasta-se de sua execução sobre um caso particular (p. 218-219).

Como podemos observar, os dois primeiros tipos de prova (empirismo ingênuo e experimento crucial) não estabelecem a verdade de uma proposição e não podem ser considerados como provas matemáticas, a não ser por quem os executa. O que se espera é que os alunos partam das provas experimentais e consigam desenvolver provas conceituais. Mas isto não ocorre tão facilmente.

Balacheff (2000) acredita existir uma ruptura cognitiva entre os dois primeiros tipos de provas e os dois últimos. Mariotti (2006) concorda com Balacheff (2000) quando afirma que há uma discrepância entre a verificação empírica e o raciocínio dedutivo, e isso é reconhecido como fonte de dificuldade relacionada à demonstração.

Em nossa proposta, focalizamos nossa atenção no constructo ‘demonstração’ que é, como vimos, um tipo de prova apoiada em uma série de enunciados que se organizam em torno de um conjunto bem definido de regras.

3.2 Teoria antropológica do didático

A Teoria Antropológica do Didático - TAD (CHEVALLARD, 1999), tem como objeto de estudo o ‘homem” frente a situações matemáticas. Este autor afirma que toda atividade humana pode ser descrita a partir de um modelo único, o qual ele chamou de praxeologia, ou organização praxeológica.

No âmbito da matemática, todo problema solicita meios para resolvê-lo e o processo que dá suporte teórico a essa resolução é a organização praxeológica matemática, ou organização matemática. Chevallard (1999) atribui a esse problema matemático o nome de tarefa, a qual a praxeologia se encarrega de resolver.

Para uma dada tarefa existe uma técnica (que é o modo de realizar a tarefa), uma tecnologia que justifica a técnica e uma teoria que fundamenta a tecnologia. Esses elementos compõem dois blocos: um bloco técnico prático, composto de tarefa e técnica, e um bloco tecnológico-teórico, composto de tecnologia e teoria. É o bloco tecnológico teórico que permite a compreensão de uma técnica e até a possibilidade de uma nova técnica para resolver uma dada tarefa.

Segundo Chevallard (1999), os objetos matemáticos são produzidos em uma instituição social, que pode ser uma escola, uma universidade, um livro didático, documentos oficiais etc., e o saber constitui uma das formas de sistematização de conhecimentos (ALMOULOUD, 2010) que se tornam objetos ao serem reconhecidos pelos sujeitos e por alguma instituição. Consideremos, por exemplo, uma situação em que um professor *A*, de uma instituição *I* (uma escola) apresenta a um aluno *C* um objeto *O*. Para apresentar esse objeto ao aluno, é necessário que o professor organize uma situação que favoreça o relacionamento entre o aluno e o objeto, isto é, uma situação que permita ao sujeito adquirir saberes sobre o objeto. Essa situação é o que Chevallard chama de organização didática.

Chevallard (1999) afirma que toda atividade matemática pode ser realizada de modo único por meio de uma organização matemática, que se refere aos conteúdos matemáticos. As organizações matemáticas possuem formas de ensinar correspondentes em determinada instituição, que são as organizações didáticas.

Uma praxeologia se compõe de dois blocos: um técnico-prático, que diz respeito à tarefa e a técnica, que corresponde ao bloco do saber fazer, e um tecnológico-teórico, que abrange a tecnologia e a teoria, correspondendo ao bloco do saber. A noção de praxeologia tem início com a ideia de tarefa, que diz respeito a qualquer atividade humana que requer ser desenvolvida. Uma tarefa é uma atividade específica que pertence a um tipo de tarefa, que por sua vez pertence a um gênero de tarefa. Uma tarefa e o tipo de tarefa que lhe corresponde são geralmente designados por um verbo: *'resolver'*, *'fazer'* e *'demonstrar'* dizem respeito a gêneros de tarefas, enquanto *'resolver um problema'*, *'fazer um bolo'* e *'demonstrar um teorema'* são os tipos de tarefas correspondentes. Um gênero de tarefa solicita uma particularidade para que seu sentido se complete; essa particularidade é o tipo de tarefa. Se T é um tipo de tarefa associado a um gênero de tarefa t, Chevallard diz que $T \in t$.

Um exemplo: *'demonstrar que os lados opostos de um paralelogramo são congruentes'* é uma tarefa, enquanto que *'demonstrar uma propriedade do paralelogramo'* é um tipo de tarefa correspondente. *'Demonstrar uma propriedade geométrica'*, por sua vez, é um gênero de tarefa.

Um tipo de tarefa solicita uma execução, isto é, determinado tipo de tarefa requer uma forma pela qual ela possa ser desenvolvida, forma essa que Chevallard chama de *técnica*. Assim, uma técnica é uma maneira de fazer uma tarefa. Uma tarefa T solicita uma técnica τ, que é a maneira de executar T. O par $[T/\tau]$ é denominado, na teoria antropológica do didático, de bloco prático-técnico, que corresponde ao saber fazer.

Uma técnica que se mostre eficiente para executar determinado tipo de tarefa pode não o ser para outra, e para a consecução de uma mesma tarefa pode haver mais de uma técnica disponível. O tipo de técnica disponível para desenvolver determinado tipo de tarefa depende da instituição a que estas pertencem. Uma técnica que se revela eficiente para executar uma tarefa em dada instituição pode não servir em outra. Dependendo do nível da instituição, é necessária uma técnica de maior ou menor complexidade. Tomemos, por exemplo, a tarefa *'provar que os lados opostos de um paralelogramo são congruentes'*: no 7.º ano do ensino fundamental, tal tarefa pode ser resolvida por meio de dobraduras, mas em um curso de graduação em matemática deverá ser demonstrada utilizando como técnica a congruência de triângulos.

Independentemente da instituição à qual a tarefa e técnica pertençam, a técnica escolhida deve vir acompanhada de uma justificativa, que Chevallard (1999) chama de *tecnologia* (θ). É a tecnologia que justifica a escolha de determinada técnica para resolver uma dada tarefa em determinada instituição. Por mais simples ou mais formal que a técnica seja, ela requer uma tecnologia apropriada que a justifique. Além da função de justificar a técnica, Chevallard atribui mais duas funções à tecnologia: a de tornar clara a técnica, isto é, explicar a escolha da técnica, e a de produzir novas técnicas. De mão de uma tecnologia, torna-se possível escolher a técnica apropriada para executar uma tarefa.

Proposta uma tarefa e escolhida uma técnica, que por sua vez foi justificada por uma tecnologia, essa tecnologia deve ser fundamentada por uma teoria (Θ). A teoria tem o papel de justificar a tecnologia. Segundo Chevallard, que a teoria participa da praxeologia como quem contempla algo de uma posição superior, e atua sobre a tecnologia de modo equivalente àquele em que a tecnologia atua sobre a técnica.

A tecnologia θ e a teoria Θ formam o bloco *tecnológico-teórico* e, juntas, representam o *saber*. Uma organização matemática se constitui, então, de dois blocos: um técnico-prático [T/τ], composto de tarefa e técnica, que representa o saber fazer, e outro tecnológico-teórico [$\theta/\ \Theta$], composto de tecnologia e teoria, que representa o saber. Uma organização matemática OM[$T/\tau/\theta/\Theta$] desenvolvida em determinada instituição que considera um tipo de tarefa específico recebe o nome de organização pontual. Quando às organizações matemáticas pontuais se reúnem em torno de uma mesma tecnologia θ, recebem, cada uma, o nome de organização matemática local, representada por OM_θ[$T/\tau/\theta/\Theta$]. As organizações matemáticas locais desenvolvidas em torno de uma mesma teoria são chamadas de organizações matemáticas regionais; quando reunidas em torno de várias teorias, são denominadas organizações matemáticas globais (FONSECA, 2010).

Por meio de uma organização didática, identificamos a organização matemática referente a 'quadrilátero' a partir das tarefas propostas pelos autores e da análise das técnicas e do bloco teórico-tecnológico relativos a cada tarefa.

Exemplifiquemos esses conceitos com um tipo de tarefa e uma tarefa a ele correspondente, juntamente com as possíveis técnicas utilizadas pelos autores dos livros analisados e o bloco teórico-tecnológico envolvido nessa tarefa:

- *Tipo de tarefa*: Enunciar e demonstrar propriedades do paralelogramo.
- *Tarefa*: Enunciar e demonstrar que os lados opostos de um paralelogramo são congruentes.

- *Técnica 1*: Utilizar o teorema das paralelas cortadas por uma transversal e a congruência de triângulos.
- *Técnica 2*: Apenas enunciar a propriedade, sem demonstrar.
- *Técnica 3*: Propor a propriedade como exercício.
- *Bloco teórico-tecnológico*: Teorema das paralelas cortadas por uma transversal; congruência de triângulos; definição de paralelogramo; definição de diagonal.

Assim, utilizamos a teoria antropológica do didático para propor uma organização didática referente a demonstrações geométricas, utilizando o objeto ‘quadrilátero’. Nessa organização, são propostas tarefas de construção geométrica em que os alunos são convidados a executar e são analisadas as técnicas que estes utilizam e os discursos teórico-tecnológicos por eles mobilizados em suas justificativas.

3.3 Teoria dos Registros de Representação semiótica e diferentes apreensões da figura

As representações semióticas se referem a um sistema específico de signos[3], que, no âmbito da matemática, incluem a língua natural, a escrita algébrica, os gráficos cartesianos, as figuras geométricas.

A função de uma representação semiótica vai muito além da comunicação. Ela se presta a representar um objeto que só é acessível por meio de representações, que podem até mesmo ser confundidas com o próprio objeto. Segundo Duval (2011), mais que tornar possível o acesso aos objetos, está a possibilidade de transformar uma representação em outra representação semiótica. Essas transformações podem ocorrer dentro de um mesmo sistema (o *tratamento*) ou entre sistemas semióticos diferentes (a *conversão*). Duval (2011) afirma que essas transformações “constituem a dinâmica cognitiva de toda atividade matemática” (p.69) e que nem todo sistema semiótico é suficiente para efetuar essas transformações. Buscando um sistema semiótico que, além de representar o objeto, cumprisse as atividades de tratamento e conversão, Duval introduziu a noção de registro de representação, que “se caracteriza essencialmente pelas operações cognitivas específicas que ele permite efetuar” (DUVAL, 2011, p.70).

[3] Signo “é uma coisa que representa uma outra coisa: seu objeto. Ele só pode funcionar como signo se carregar esse poder de representar, substituir uma outra coisa diferente dele” (SANTAELLA, 1983, p.12). Segundo Duval (2011, p.71), “o que constitui qualquer coisa como signo não é a sua utilização com a finalidade de comunicação; é seu emprego por oposição a uma ou várias outras coisas que poderiam ser empregadas em seu lugar na mesma situação”.

A especificidade da atividade matemática, segundo Duval (2011), está relacionada a diversidade de registros de um mesmo objeto e a possibilidade de transformação de registros de representação, que o leva a acreditar que a compreensão em matemática depende da coordenação de ao menos dois registros de representação para um mesmo objeto.

As representações envolvidas na geometria são a língua natural, a simbólica e a representações geométricas ou figurais. Para serem resolvidos, os problemas de geometria necessitam, em sua maioria, do apoio da figura, o que corresponde à conversão de um problema em língua natural para um problema no registro figural. Os tratamentos também são comuns em geometria ao relacionar as propriedades de um objeto.

O raciocínio geométrico, de acordo com Duval (*apud* ALMOULOUD, 2004) envolve três tipos de processos cognitivos, que desempenham funções epistemológicas próprias:

- o processo de visualização para exploração heurística de uma situação complexa;
- a construção de configurações, que pode ser trabalhada como um modelo em que as ações realizadas representadas e os resultados observados são ligados aos objetos matemáticos representados;
- o raciocínio, que é o processo que conduz à prova e à explicação.

Duval apud Almouloud (2004, p. 126) afirma que "esses processos estão entrelaçados e sua sinergia é cognitivamente necessária para a proficiência em Geometria". No entanto, estes podem ser realizados de forma independente. Por exemplo, a construção pode levar a uma visualização, mas esta não depende da construção. Já a visualização pode colaborar para o raciocínio, bem como levar a cometer enganos (DUVAL apud JONES, 1998).

As definições e os problemas em geometria solicitam, mesmo que inconscientemente, ações de reprodução, construção e desconstrução de figuras que, associadas aos textos, requerem formas de interpretação que Duval (ALMOULOUD, 2004) classifica em:

1. *Sequencial*: utilizada nas atividades de construção ou descrição, com o objetivo de reproduzir uma figura.
2. *Perceptiva*: interpretação das formas de uma figura em dada situação geométrica.

3. *Discursiva*: interpretação dos elementos da figura geométrica, privilegiando a articulação de enunciados, levando em consideração a rede semântica de propriedades do objeto.
4. *Operatória*: centrada nas modificações possíveis de uma figura de partida e na reorganização perceptiva que essas modificações sugerem.

Tomar consciência da distinção entre as três primeiras formas de apreensão é condição necessária para a resolução de problemas em geometria e para entrada na forma de desenvolvimento do raciocínio exigida por essa resolução (DUVAL, 2012).

3.4 Construção e análise de situações-problema

Nesta parte, apresentamos uma parte da organização didática que foi planejada para ser aplicada aos alunos de um curso de licenciatura em Matemática, no intuito de minimizar as dificuldades relacionadas a aprendizagem da geometria, mais especificamente, a aprendizagem da geometria via provas e demonstrações. Visa-se também criar condições para que futuros professores (participantes da pesquisa) percebam a necessidade de ensinar demonstrações a seus futuros alunos. Ressaltamos que não pretendemos fornecer fórmulas para se ensinar demonstração, mas sim vislumbrar se a referida organização, associada às discussões, pode possibilitar o ensino e a aprendizagem de conceitos geométricos via processos de demonstração.

Escolhas das variáveis globais:

A geometria é, geralmente, apresentada na educação básica e também no ensino superior apoiando-se em uma lógica que omite, muitas vezes, as fases de seu desenvolvimento. Concordamos com Roque (2012) quando afirma que existe uma diferença crucial entre a lógica em que um texto matemático é apresentado e o modo como ele se desenvolve. A abordagem do método dedutivo na graduação é feita no sentido inverso em relação ao desenvolvimento desse método. Roque (2012, s.p) assinala que:

> Um dos fatores que contribuem para que a matemática seja considerada abstrata reside na forma como a disciplina é ensinada, fazendo-se uso, muitas vezes, da mesma ordem de exposição presente nos textos matemáticos. Ou seja, em vez de partirmos do modo como um conceito matemático foi desenvolvido, mostrando as perguntas às quais ele responde, tomamos esse conceito como algo pronto.

Esta forma de apresentação direta dos conteúdos matemáticos foi observada nos livros analisados no trabalho de Ferreira (2016), isto é, da formalização para a aplicação. Fazemos a hipótese de que a inversão entre a ordem da descoberta e a ordem da exposição dos conhecimentos matemáticos pode ser um dos fatores que contribuem para a dificuldade dos alunos em compreender demonstrações geométricas e buscamos desenvolver uma sequência de atividades que proporcionasse uma simulação de um ambiente de descoberta. Nossa concepção é que se deva permitir ao aluno construir a demonstração a partir de uma motivação que possa provocar sua descoberta. Neste sentido, propomos uma abordagem que se opõe ao modelo atualmente praticado e investigamos se ela se apresenta favorável a mudança do quadro atual de nossos sujeitos.

Ferreira (2016), no seu estudo das dimensões epistemológica, cognitiva e didática (as razões identificadas nos estudos preliminares que podem justificar a manutenção do atual estado da prática das demonstrações), identificou os seguintes aspectos, quanto à *dimensão epistemológica* associada às características das demonstrações e provas:

> A diferença entre a lógica em que um texto matemático é apresentado e o modo em que ele se desenvolve; A abordagem do método dedutivo na graduação ocorre no sentido inverso ao de seu desenvolvimento; A não distinção entre os termos ‘prova’ e ‘demonstração’ pode contribuir para a ausência de seu ensino; A demonstração com a exclusiva função de validação pode contribuir para a falta de estímulo do aluno em demonstrar, dando preferência a validações empíricas; Falta de conhecimento dos alunos com relação ao método dedutivo e seus termos próprios (FERREIRA, 2016, p.158).

Quanto à dimensão cognitiva associada às características dos alunos do curso de licenciatura em matemática, focou-se:

> O nível de escolaridade do aluno diferindo do nível de pensamento geométrico; Problemas na transição da geometria empírica à dedutiva; Dificuldades na leitura de um problema e na redação de uma demonstração; Inabilidades na manipulação de argumentos de um dado problema; Falta de consciência a respeito da distinção entre as apreensões sequencial, perceptiva e discursiva; Dificuldades na conversão entre os registros em língua natural, figural e algébrico (FERREIRA, 2016, p.158).

Na *dimensão didática* associada ao funcionamento do sistema de ensino de provas e demonstrações geométricas, focou-se os seguintes aspectos:

> O tipo de abordagem dada à demonstração na graduação não estimula o futuro professor a implementar a demonstração em suas aulas; Não reconhecimento, pelo futuro professor, de que a demonstração tem importância para o desenvolvimento intelectual de seu aluno, postura essa que pode contribuir para que esse professor não inclua demonstrações em sua prática; Falta de uma metodologia que aproxime o aluno à prova matemática (FERREIRA, 2016, p.158-159).

Escolha das situações-problema:

Lembramos, novamente, que as situações, aqui analisadas, foram propostas a estudantes de um curso de licenciatura em Matemática de uma universidade do estado da Bahia, que já tinham cursados ou cursam a componente ‘Geometria plana’, que é oferecida no segundo semestre do curso, em que são contemplados os conteúdos da geometria plana euclidiana.

Inspiramo-nos para a elaboração das situações-problema em Maioli (2001) e Maziero (2011). Maioli (2001) apresenta uma inspiradora sequência que se mostrou fértil para discutir a construção dos conceitos de quadriláteros notáveis e sua classificação. A primeira etapa de nossa sequência, embora diferente da sequência proposta por Maioli (2001), tem como objetivo abrir uma discussão semelhante à proposta da autora. Tal discussão visa permitir esclarecer aos alunos a importância de um conceito e a existência de diferentes definições para um mesmo quadrilátero, que geram diferentes classificações sem que nenhuma delas esteja incorreta.

Maziero (2011) apresenta como produto final de seu trabalho uma sequência, produzida em conjunto com seu orientador e que ainda não havia sido aplicada e que satisfazia nossas expectativas quanto ao modo de simular um ambiente científico com potencial para motivar os alunos a fazer descobertas e propiciar a estes vivenciar momentos de ação, formulação e validação (BROUSSEAU, 1997). A sequência contempla atividades de construções geométricas com potencial para proporcionar aos alunos condições de formular conjecturas, pensar sobre a figura, fazer conversões entre representações e evoluir da apreensão perceptiva para a discursiva.

Adaptamos a sequência modelando-a em termos de tarefas, técnicas e bloco tecnológico-teórico, fundamentando-nos na teoria antropológica do didático, de Chevallard (1999), e a complementamos com atividades que fazem parte de livro de autoria do Prof. Dr. Saddo Almouloud (ainda não publicado). O foco deste artigo é justamente a análise a priori dessas atividades complementares que não puderem ser aplicadas aos alunos, participantes da pesquisa por falta de espaço e tempo hábil para sua experimentação.

A escolha dessas tarefas complementares se justifica por acreditarmos que têm o potencial de permitir aos alunos interpretar condições necessárias e suficientes, enunciar recíprocos de teoremas, fazer tratamentos figurais, converter representações e elaborar e redigir demonstrações – enfim, aplicar as teorias institucionalizadas.

A nossa proposta difere das apresentadas nos livros analisados (FERREIRA, 2016), uma vez que estes abordam o conteúdo ‘quadrilátero’ partindo da formalização e posteriormente fazendo a aplicação de resultados na resolução de problemas, enquanto em nossa sequência apresentamos uma abordagem inversa: da situação-problema para depois culminar na institucionalização, como proposto por Brousseau (2008). Visamos, assim, propiciar condições para que o aluno assuma um papel ativo diante das tarefas e sinta-se comprometido com o processo de aprendizagem.

Análise das situações-problema

A sequência apresentada aos alunos por Ferreira (2016) é composta de três partes. Na primeira parte, utilizando os três livros analisados, que constam na bibliografia da disciplina ‘Geometria plana’ de um curso de licenciatura em matemática, e também livros indicados para os níveis fundamental e médio, desenvolveu-se uma atividade com o objetivo de possibilitar aos alunos se apropriar dos conhecimentos em jogo. Objetivou-se também nesta etapa, trabalhar as definições de quadriláteros notáveis utilizando simultaneamente três registros de representação: o registro da língua natural, o registro simbólico e o registro figural, chamando atenção dos alunos para a importância dos conceitos e de manter coerência com as definições adotadas. Esta etapa se justifica pelo fato de dois dos livros analisados não apresentarem as definições dos quadriláteros nos três registros de representação e de três apresentarem incoerência entre a definição e a propriedade dos ângulos da base do trapézio isósceles.

Na segunda parte, foram apresentadas atividades em que os alunos terão que efetuar a conversão do registro na língua natural para o registro figural e em sua justificativa o registro simbólico e língua natural. Diante dessas atividades pretendeu-se oportunizar aos alunos vivenciar momentos de ação, formulação e validação que dizem respeito à fase adidática proposta por Brousseau (2008), e paralelamente foi a institucionalização em que as propriedades dos quadriláteros foram discutidas.

Propomos apresentar as situações da terceira parte em que as situações propostas visam que os alunos possam aplicar as propriedades institucionalizadas nas tarefas anteriores. Serão propostas situações que permitem aos alunos trabalhar condições necessárias e suficientes, destacar hipótese e tese de um teorema e trabalhar teorema recíproco, assim como explorar a redação de um teorema.

A seguir, apresentamos as tarefas e sua análise a priori.

Tarefa 1: Construir um paralelogramo em que dois vértices pertencem a duas retas concorrentes.

Consideram-se dois pontos A e B e duas retas d e d_1 concorrentes e diferentes de $\overleftrightarrow{AB}$. Existe um ponto C sobre d_1 e um ponto D sobre d tal que o quadrilátero ABCD seja um paralelogramo? Justifique.

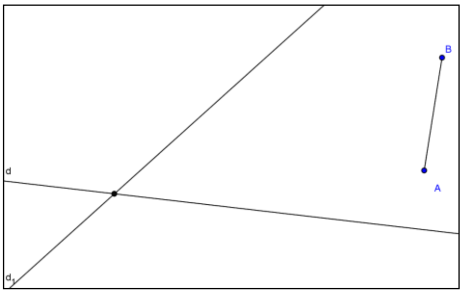

Figura 3: Figura suporte da Tarefa 1
Fonte: Autores baseados em Maziero (2011, apud FERREIRA, 2016, p.320)

Análise *a priori* da tarefa 1

Técnica 1: Construímos a imagem da reta d pela translação de vetor $\overrightarrow{AB}$. As retas d' e d_1 interceptam-se no ponto C. Depois construímos a imagem d_2 da reta d_1 pela translação de vetor $\overrightarrow{BA}$. As retas d_2 e d interceptam-se no ponto D. Como $CD = BA$, o paralelogramo *ABCD* é a solução do problema (Figura 4).

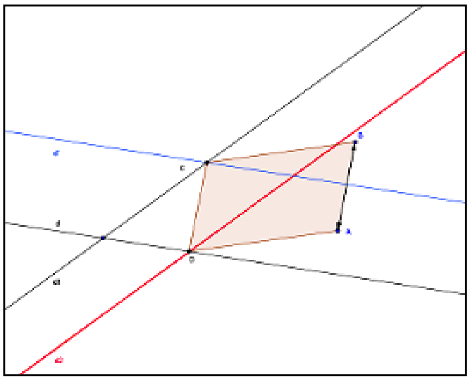

Figura 4: Figura 105. Figura suporte da Tarefa 1
Fonte: Autores baseados em Maziero (2011, apud FERREIRA, 2016, p.320)

A descrição da técnica envolve elementos teóricos (uso da translação, por exemplo) que justificam a validação matemática da construção. Uma das técnicas de construção da tarefa 1 é a utilização da translação de vetores. Acreditamos que a utilização dessa técnica poderá facilitar a construção solicitada na tarefa 1, uma vez que os alunos já terão vivido as fases de ação, formulação e validação e presumimos que tenha ocorrido aprendizagem.

Bloco tecnológico-teórico: O processo de construção deve ser justificado apoiando-se nas seguintes propriedades geométricas: propriedades da translação de vetores; definição de paralelogramo; propriedade do paralelogramo.

Tarefa 2:

O seguinte raciocínio está correto? Por quê? Se não o corrija. *a) ABCD é um paralelogramo, pois ele tem dois lados* $\overline{AB}$ *e* $\overline{CD}$ *paralelos.* *b) ABCD é um paralelogramo, pois suas diagonais* $\overline{AC}$ *e* $\overline{BD}$ *têm um ponto comum.* *c) MNPQ é um quadrilátero cujas diagonais são perpendiculares: é um losango.* *d) Um retângulo é um paralelogramo particular.*

Análise a priori da tarefa 2

Com esta tarefa objetivamos que os alunos:

- Apliquem corretamente as propriedades dos quadriláteros institucionalizadas;
- Atentem para o enunciado de um problema.
- Caracterizem os quadriláteros notáveis: paralelogramo, losango e retângulo.

Esta tarefa pode ser resolvida decompondo-a em quatro subtarefas que nomeamos por T_{02a}, T_{02b}, T_{02c} e T_{02d}.

(T_{02a}) ABCD é um paralelogramo, pois ele tem dois lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ paralelos.

O aluno alcançará a resposta correta caso ele afirme que o raciocínio não está correto, pois um par de lados paralelos não é suficiente para garantir que um quadrilátero é um paralelogramo. Utilizando uma das caracterizações do paralelogramo, o aluno deverá corrigir a afirmação da seguinte forma: *ABCD é um paralelogramo, pois ele tem dois lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ paralelos e congruentes.*

É provável também que os alunos corrijam a afirmação, utilizando a definição de paralelogramo, da seguinte forma: *ABCD é um paralelogramo, pois ele tem dois pares de lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são paralelos.*

(T_{02b}) ABCD é um paralelogramo, pois suas diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ têm um ponto comum.

O aluno alcançará a resposta correta caso ele afirme que o raciocínio não está correto, pois ter diagonais que se interceptem em um ponto não é suficiente para garantir que um quadrilátero é um paralelogramo. Utilizando a propriedade referente às diagonais de um paralelogramo o aluno poderá corrigir a afirmação da seguinte forma: *ABCD é um paralelogramo, pois suas diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ se interceptam nos seus pontos médios.*

(T_{02c}) MNPQ é um quadrilátero cujas diagonais são perpendiculares: é um losango.

O aluno alcançará a resposta correta caso ele afirme que o raciocínio não está correto, pois ter diagonais perpendiculares não é suficiente para garantir que um quadrilátero seja um losango. Utilizando a propriedade referente às diagonais de um losango o aluno poderá corrigir a afirmação da seguinte forma: *MNPQ é um quadrilátero cujas diagonais são perpendiculares e se interceptam em seus pontos médios: é um losango.* Essa propriedade é uma das caraterísticas de um losango que precisa ser apreendida pelos alunos e/ou reconstruída a partir dessa tarefa.

(T_{02d}) Um retângulo é um paralelogramo particular.

O aluno responderá corretamente esta tarefa caso ele afirme que o raciocínio está correto, pois um retângulo, é, antes de tudo, um paralelogramo que tem um ângulo reto.

(T_{02}) é uma tarefa que permite consolidar os conhecimentos dos alunos no diz respeito a algumas das propriedades dos quadriláteros notáveis.

Tarefa 3:

a) Explique como você construiria um quadrilátero plano UVWZ que possui os quatro ângulos congruentes e os quatro lados congruentes. Faça a construção.
b) Que quadrilátero é esse?
c) Construa as diagonais de UVWZ. Elas são perpendiculares? Elas são congruentes? Demonstre sua resposta.
d) Explique como você construiria um paralelogramo RSTU cujas diagonais são perpendiculares e congruentes. Faça a construção. RSTU é um losango? É um quadrado? Por quê?

Análise a priori da tarefa 3

Com esta tarefa objetivamos que o aluno:

- Utilize a linguagem natural escrita para descrever um procedimento para a construção geométrica de um quadrado;
- Relacione o quadrado com o paralelogramo, o retângulo e o losango.

(T_{03a}, T_{03b}) Explique como você construiria um quadrilátero plano UVWZ que possui os quatro ângulos congruentes e os quatro lados congruentes. Faça a construção. Que quadrilátero é esse?

Ao realizar esta tarefa o aluno provavelmente já reconhece o quadrilátero que possui os quatro lados e os quatro ângulos congruentes como um quadrado. Uma das técnicas é que o aluno inicie sua construção a partir de um lado ($\overline{UV}$, por exemplo) do quadrilátero, e construir os demais lados desse quadrilátero da seguinte forma (Figura 5):

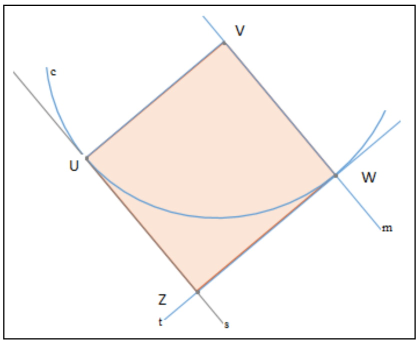

Figura 5: Figura-suporte à técnica 1, referente à tarefa 3
Fonte: Construção nossa

Ao traçar as perpendiculares ($m \perp \overline{UV}$, $s \perp \overline{UV}$ e $t \perp m$), os alunos poderão concluir que os ângulos $\widehat{U}$, $\widehat{W}$ *e* $\widehat{V}$ são retos. Nesse caso, recorrerão à soma das medidas dos ângulos internos do quadrilátero ou ao teorema das paralelas para concluir que $\widehat{UZW}$ é reto.

Ao observar que UVWZ é um retângulo com dois lados consecutivos congruentes, ficará provado que este é um quadrado. Pelo processo de construção, os alunos poderão perceber que os lados $\overline{UV}$ e $\overline{VW}$ do quadrilátero *UVWZ* são congruentes por se tratar de raios da mesma circunferência.

Cada conclusão alcançada pelos alunos, por meio da figura e das apreensões operatórias e discursivas, pode ou não evoluir para a apreensão conceitual. Os alunos deverão identificar as hipóteses do problema relacionando-as com a figura e chegar a uma prova conceitual.

Bloco tecnológico-teórico: Definições de reta perpendicular, de circunferência, de raio, de quadrado e de retângulo; teorema da existência da perpendicular a uma reta dada passando por um ponto dado; teorema das paralelas; propriedades dos lados opostos do retângulo. Estes objetos e propriedades geométricos já foram contemplados em outras tarefas, o que nos faz crer que os alunos já os dominam.

Outra técnica é utilizar o par de esquadros para construir retas paralelas e perpendiculares de modo que o quadrilátero construído seja um quadrado.

(T_{03c}) Construa as diagonais de UVWZ. Elas são perpendiculares? Elas são congruentes? Demonstre sua resposta.

Nesta tarefa o aluno poderá recorrer à figura (Figura 6), isto é, a apreensão perceptiva para formular conjecturas sobre o perpendicularismo ou não das diagonais. A aceitação ou não dessas conjecturas deve ser garantida por meio da demonstração.

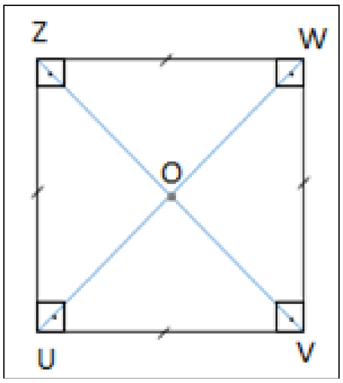

Figura 6: Figura suporte da tarefa (T14b)
Fonte: Ferreira (2016, p.323)

Os alunos podem articular os seguintes argumentos: O quadrado possui os quatro ângulos retos, logo o quadrado é um retângulo. Como o retângulo possui diagonais congruentes, então o quadrado possui diagonais congruentes.

Para demonstrar que o quadrado possui diagonais perpendiculares, o aluno poderá fazê-la da seguinte forma: nas T_{03a}, T_{03b}, demonstramos que o quadrilátero UVWZ é um quadrado. Portanto, suas diagonais interceptam-se nos seus pontos médios (pois é um paralelogramo) e são congruentes. Então os triângulos UOZ, UOV, VOW e WOZ são congruentes pelo caso LAL (Lado-Ângulo-Lado). Deduz-se que os ângulos $\widehat{UOZ}$, $\widehat{UOV}$, $\widehat{VOW}$ e $\widehat{WOZ}$ são congruentes e a soma de suas medidas é à 360º. Pode-se concluir que $\widehat{UOZ}$, $\widehat{UOV}$, $\widehat{VOW}$ e $\widehat{WOZ}$ têm a mesma medida de 90º, portanto as diagonais do retângulo UVWZ são perpendiculares.

Pode-se também partir do fato que $\overline{WO}$ é mediana relativa à base $\overline{ZV}$ do triângulo isósceles *ZWV* e, portanto, $\overline{WO}$ também é altura relativa a $\overline{ZV}$. Desse modo podemos afirmar que o ângulo formado pelas diagonais $\overline{ZV}$ e $\overline{UW}$ do quadrilátero *UVWZ* é reto. Logo, as diagonais desse quadrilátero são perpendiculares.

Outro argumento que poderá ser utilizado pelos alunos é que se *UVWZ* é um quadrilátero de lados congruentes, então esse quadrilátero é um losango e o losango possui diagonais perpendiculares. Logo, as diagonais do quadrado são perpendiculares.

(T_{03d}) Explique como você construiria um paralelogramo RSTU cujas diagonais são perpendiculares e congruentes. Faça a construção. RSTU é um losango? É um quadrado? Por quê?

Esperamos que os alunos afirmem que basta construir dois segmentos congruentes, perpendiculares e que se interceptem em seus respectivos pontos médios. Pois, ter diagonais que se interceptam em seus respectivos pontos médios é uma condição necessária e suficiente para que um quadrilátero seja um paralelogramo.

Já foi abordado em tarefas anteriores que para um quadrilátero ser um losango basta que este possua diagonais perpendiculares que se interceptem em seus respectivos pontos médios. Nesta tarefa, visamos que o aluno observe que temos agora um paralelogramo com diagonais perpendiculares. O fato de *RSTU* ser um paralelogramo implica que suas diagonais se interceptam nos pontos médios de ambas. Logo, este paralelogramo é um losango.

RSTU é um paralelogramo de diagonais congruentes, então esse paralelogramo é um retângulo.

Se *RSTU* é um losango (possui todos os lados congruentes) e um retângulo (possui todos os ângulos retos), então *RESU* é um quadrado.

Com esta tarefa o aluno poderá estabelecer as relações entre os quadriláteros notáveis, articular argumentos exercitando a construção de uma demonstração e estabelecer condições necessárias e suficientes para que um quadrilátero seja um quadrado.

Com esta tarefa retornamos às construções geométricas, porém em um sentido inverso. Isto é, as construções podem ser livres, sendo garantidas pelas propriedades já institucionalizadas. Desse modo, esta tarefa tem potencial para articular as apreensões perceptiva e discursiva.

Tarefa 4:

Justifique as afirmações:

Para demonstrar que um quadrilátero é um:

*a) **Retângulo**, basta mostrar que é um paralelogramo que tem um ângulo reto.*

*b) **Losango**, basta mostrar que um paralelogramo que tem dois lados consecutivos congruentes.*

*c) **Quadrado**, basta mostrar que é um losango com um ângulo reto.*

Análise a priori da tarefa 4

Com esta tarefa objetivamos que o aluno fixe os conceitos e propriedades do retângulo, do losango e do quadrado.

(T_{04a}) Para demonstrar que um quadrilátero é um Retângulo, basta mostrar que é um paralelogramo que tem um ângulo reto.

Como em um paralelogramo os ângulos consecutivos são suplementares e os ângulos opostos são congruentes, então se um paralelogramo possui um ângulo reto os demais também serão retos. Logo, um paralelogramo com um ângulo reto é um retângulo.

(T_{04b}) Para demonstrar que um quadrilátero é um Losango, basta mostrar que um paralelogramo que tem dois lados consecutivos congruentes.

Como os lados opostos de um paralelogramo são congruentes, então um paralelogramo com dois lados consecutivos congruentes terá todos os lados congruentes. Logo esse paralelogramo será um losango.

(T_{04c}) Para demonstrar que um quadrilátero é um Quadrado, basta mostrar que é um losango com um ângulo reto.

Como o losango é um paralelogramo, ele possui os ângulos opostos congruentes e os ângulos consecutivos suplementares. Então se o losango possui um ângulo reto, os outros ângulos também serão retos. Um losango com os quatro ângulos congruentes é um quadrado, pois é losango que tem ângulo reto.

Esta tarefa possibilita o aluno a retornar às propriedades relativas aos ângulos dos quadriláteros notáveis e às caracterizações (propriedades, definições, elementos notáveis etc.) conceitos desses quadriláteros.

Tarefa 5:

Nos teoremas seguintes, temos mais hipóteses que necessário. Suprima-as.
a) Um paralelogramo cujas diagonais têm mesma medida e interceptam-se nos seus pontos médios é um retângulo.
b) Um quadrilátero cujas diagonais têm mesmo ponto médio, mesma medida e são mediatrizes uma para outra, é um quadrado.
c) Se O é ponto médio de $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, OA = OB = OC = OD e $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ se interceptam no ponto O, então ABCD é um retângulo.

Análise a priori da tarefa 5

Com esta tarefa objetivamos que o aluno compreenda que existem condições mínimas que caracterizam um objeto matemático.

(T_{05a}) Um paralelogramo cujas diagonais têm mesma medida e interceptam-se nos seus pontos médios é um retângulo.

Esperamos que os alunos respondam que, para que um paralelogramo seja um retângulo, é necessário e suficiente que possua diagonais congruentes. Pois o fato de o quadrilátero ser um paralelogramo já o obriga a ter diagonais que se interceptam nos seus pontos médios. Dessa forma suprimindo as hipóteses desnecessárias o teorema pode ser redigido da seguinte forma:

Um paralelogramo cujas diagonais têm mesma medida é um retângulo.

(T_{05b}) *Um quadrilátero cujas diagonais têm mesmo ponto médio, mesma medida e são mediatrizes uma para outra, é um quadrado.*

Nesta tarefa o aluno deverá conhecer o conceito de mediatriz e observar que o fato de já haver uma hipótese que diz respeito ao ponto médio implica que bastaria acrescentar a hipótese que as diagonais são perpendiculares. Então teremos duas formas equivalentes de escrever o teorema:

Um quadrilátero cujas diagonais têm mesmo ponto médio, mesma medida e são perpendiculares entre si, é um quadrado. Ou:

Um quadrilátero cujas diagonais têm mesma medida e são mediatrizes uma para outra, é um quadrado.

(T_{05c}) *Se O é ponto médio de* $\overline{AC}$ *e* $\overline{BD}$, *OA = OB = OC = OD e* $\overline{AC}$ *e* $\overline{BD}$ *se interceptam no ponto O, então ABCD é um retângulo*.

A informação desnecessária nesta tarefa é que $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ se interceptam no ponto *O*, pois se *O* é ponto médio destes segmentos, então necessariamente eles se interceptam em *O*. Quanto às igualdades $OA = OB = OC = OD$, elas são necessárias para garantir as congruências das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{\mathrm{BD}}$ do retângulo. Desse modo, esperamos que os alunos redijam o teorema da seguinte forma:

Se O é ponto médio de $\overline{AC}$ *e* $\overline{BD}$ e *OA = OB = OC = OD, então ABCD é um retângulo*.

Tarefa 6:

Sabe-se de um quadrilátero que ele tem três lados de mesmo comprimento. Henrique diz: "*Basta que suas diagonais se interceptem nos seus pontos médios para que ele seja um losango*". Magalhães argumentou: "*Basta que tivesse com um ângulo reto para que ele seja um quadrado*". Malan: *"Basta que o quarto lado seja o dobro de um dos três lados para que ele seja um trapézio"*. Quem acertou? Quem errou? Por quê?

Análise a priori da tarefa 6

Com esta tarefa objetivamos que o aluno tenha a oportunidade de conjecturar sobre situações ainda não vivenciadas, de modo a procurar contraexemplos ou aplicar propriedades institucionalizadas para justificar sua resposta. Neste momento, esperamos que os alunos já reconheçam o estatuto da figura e não seja conduzido a uma resposta apenas pela apreensão perceptiva.

Segundo a afirmação de Henrique, teríamos um quadrilátero convexo, já que as diagonais se intersectam, e esse quadrilátero é um paralelogramo, uma vez que as diagonais se interceptam nos pontos médios de ambas. Como paralelogramo possui os lados opostos congruentes e o quadrilátero a que a tarefa se refere tem três lados congruentes, podemos afirmar que seus quatro lados são congruentes, e, de fato, esse quadrilátero é um losango. Portanto a afirmação de *Henrique* está correta.

A afirmação de *Magalhães* não está correta. O aluno poderá apresentar o seguinte contraexemplo:

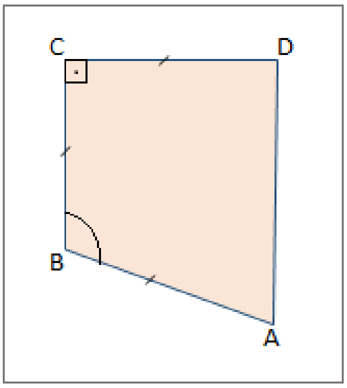

Figura 7: Figura suporte da tarefa 6
Fonte: Ferreira (2016, p.328)

O quadrilátero *ABCD* tem *AB* = *BC* = *CD*, o ângulo $B\hat{C}D$ reto e o ângulo $A\hat{B}C$ não reto. Ao construir um quadrilátero em que um dos ângulos consecutivos a $B\hat{C}D$ tenha medida diferente de 90º, garantimos que esse quadrilátero não é um paralelogramo, consequentemente não é um quadrado.

A afirmação de *Malan* também não está correta. O aluno poderá apresentar a seguinte construção como contraexemplo:

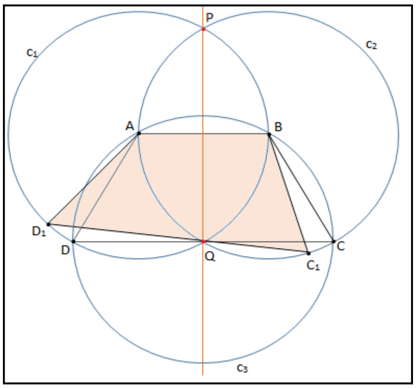

Figura 8: Figura suporte da tarefa 6.
Fonte: Ferreira (2016, p.328)

Considerar o segmento $\overline{AB}$. Traçar duas circunferências c_1 e c_2 de raios *AB*, com centros *A* e *B* respectivamente. Marque os pontos *P* e *Q*, interseções de c_1 com c_2.

Com centro em *Q* (A construção seria análoga, caso escolhêssemos P), traçar uma circunferência c_3 de raio *QB*. Marque os pontos *C* e *D*, interseções de c_3 com c_2 e

c_1, respectivamente. O quadrilátero *ABCD* é tal que *CB* = *BA* = *AD* e *CD* medindo o dobro de um dos lados.

Tomando agora um ponto $D_1 \neq D$ em c_1 construa um segmento D_1C_1 de medida igual a *CD* tal que $C_1 \neq C$ pertença a c_2. O quadrilátero ABC_1D_1 é tal que $D_1A = AB = BC_1$, e D_1C_1 mede o dobro de um dos outros lados do quadrilátero. Como $D_1C_1 \neq CD$ e $\overline{D_1C_1}$ e $\overline{CD}$ são concorrentes, então um deles não é paralelo a $\overline{AB}$. Além disso $\overline{AD_1}$ não é paralelo a $\overline{BC_1}$ e $\overline{AD}$ não é paralelo a $\overline{BC}$, pois, caso contrário, teríamos $D_1C_1 = DC = AB$ o que contrariaria a hipótese de que $\overline{D_1C_1}$ e $\overline{DC}$ medem, cada um, o dobro de $\overline{AB}$. Logo, ou *ABCD* não é um trapézio ou ABC_1D_1 não é um trapézio.

O aluno pode apresentar também como contraexemplo o seguinte quadrilátero:

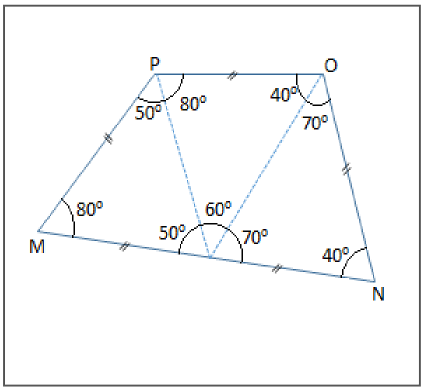

Figura 9: Figura suporte da tarefa 6
Fonte: Ferreira (2016, p. 329)

Como dois ângulos consecutivos do quadrilátero *MNOP* não são suplementares, então este quadrilátero não é um trapézio.

Tarefa 7: ABCD é um quadrilátero plano convexo. Os pontos *I*, *J*, *K*, *L* são os pontos médios respectivos de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$.

a) Os segmentos $\overline{IJ}$ e $\overline{KL}$ são paralelos? Por quê?

b) *IJKL* é um paralelogramo? Por quê?

Análise a priori da tarefa 7

Com esta tarefa objetivamos introduzir o conceito e a propriedade de base média do triângulo.

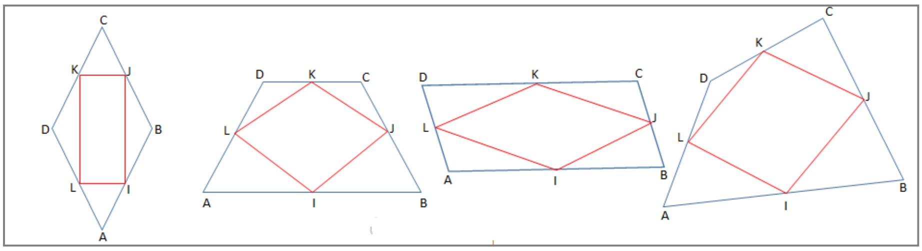

Figura 10: Figura suporte da tarefa T19.
Fonte: Ferreira (2016, 330)

Acreditamos que, com esta tarefa, o aluno irá conjecturar sobre a figura e vai acreditar que o quadrilátero construído ao ligar os pontos médios de *ABCD* é, de fato, um paralelogramo. Porém, neste momento, acreditamos que o aluno já sinta a necessidade de investigar o porquê deste fato. A esta altura é provável que o aluno já busque a prova não apenas com a função de validação, mas também com a função de explicação.

O quadrilátero *ABCD* a que a tarefa se refere é um quadrilátero qualquer, porém, as conjecturas que poderão ser apresentadas por parte dos alunos, podem nos fornecer subsídios para questionar sobre casos particulares, como por exemplo, sob quais condições o quadrilátero obtido pela união dos pontos médios é um losango, ou um retângulo, ou ainda um quadrado? Devemos impor condições sobre os lados? Sobre as diagonais? Neste momento os alunos poderão vivenciar sucessivas fases de ação e formulação.

O tratamento que deverá ser feito na figura para que o aluno possa associar com a apreensão discursiva e validar o que será observado durante as conjecturas exige uma reconfiguração que é não congruente ao que é solicitado no enunciado. Isto é, o aluno deverá demonstrar que o quadrilátero obtido pela união dos pontos médios é um paralelogramo, e, para isso, o aluno deverá construir diagonais do quadrilátero primitivo e visualizar os triângulos obtidos ao traçar as diagonais.

Não esperamos que o aluno realize a demonstração da propriedade da base média do triângulo, porém esta tarefa é propícia para provocar conjecturas por parte dos alunos para que estes percebam esta propriedade por meio da apreensão perceptiva e sintam-se motivados a desejar saber o porquê desta propriedade. Neste momento institucionalizaremos a propriedade da base média do triângulo com sua respectiva demonstração.

Tarefa 8:

Seja ABCD um retângulo tal que AB = 2BC, I ponto médio do segmento CD e K o do segmento AB.
a) KI = KA = KB? Demonstre a sua resposta.
b) As retas AI e BI são perpendiculares? Por quê?
c) J e L são os pontos médios respectivos dos segmentos IB e AI. IJKL é um quadrado? Por quê?
d) A reta JL é paralela às retas AB e CD? Demonstre a sua afirmação.

Análise a priori da tarefa 8

Com esta tarefa objetivamos ao aluno:

- Conjecturar sobre a figura;
- Aplicar a propriedade da base média do triângulo
- Associar as apreensões perceptiva e discursiva;
- Construir demonstrações geométricas;

(T_{08a}) *KI = KA = KB? Demonstre a sua resposta.*

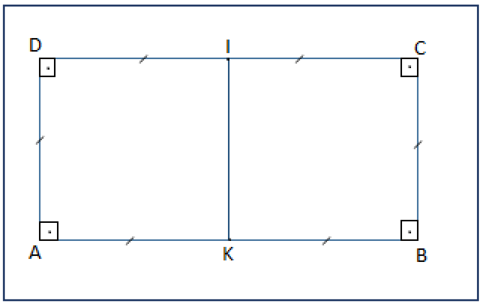

Figura 11: Figura suporte da tarefa T_{08a}.
Fonte: Ferreira (2016, p.331)

Como *ABCD* é um retângulo, temos que $\overline{AB}//\overline{CD}$ e, então $\overline{AK}//\overline{DI}$. Podemos afirmar também que $\overline{AK} \equiv \overline{DI}$ pois *K* e *I* são pontos médios de $\overline{AB}$ *e* $\overline{CD}$ respectivamente. Logo, *AKID* é um paralelogramo com dois ângulos retos e, portanto, um retângulo. Podemos concluir então que *KI* = *KA*. Como *K* é ponto médio de $\overline{AB}$, então *KA* = *KB* = *KI*.

(T_{19b}) *As retas AI e BI são perpendiculares? Por quê?*

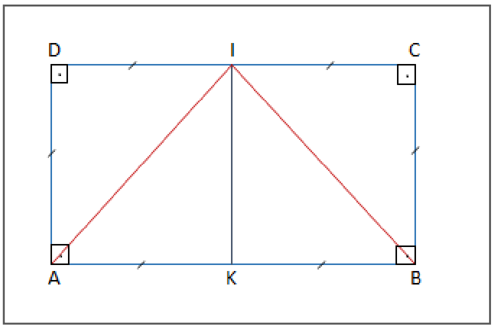

Figura 12: Figura suporte da tarefa T_{08b}.
Fonte: Ferreira (2016, p.332)

AKID e *KBCI* são retângulos com dois ângulos retos. Logo, são quadrados e *AI* e *IB* são diagonais de *AKID* e *KBCI* respectivamente. Assim podemos afirmar que:

$$A\hat{I}K = K\hat{I}B = 45^{\circ} \Longrightarrow A\hat{I}K + K\hat{I}B = 90^{\circ} \Longrightarrow A\hat{I}B = 90^{\circ} \Longrightarrow \overline{AI} \perp \overline{IB}.$$

(T_{19c}) *J e L são os pontos médios respectivos dos segmentos IB e AI. IJKL é um quadrado? Por quê?*

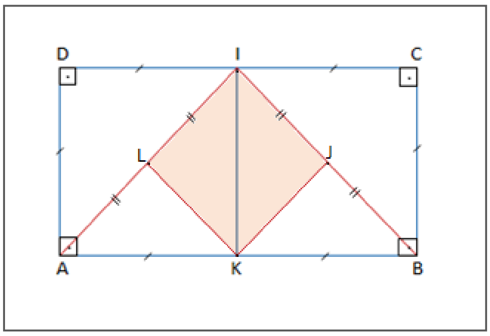

Figura 13: Figura suporte da tarefa T19c.
Fonte: Ferreira (2016, p.332)

AKID e *AKBC* são quadrados congruentes, então *AL* = *LI* =*LK* = *IJ* = *JB* = *JK* (diagonais do quadrado são congruentes e se interceptam nos respectivos pontos médios). Logo, o quadrilátero *KLIJ* é um losango. Além disso, foi provado na tarefa (T_{19b}) que $A\hat{I}B = 90^{\circ}$. Temos que *KLIJ* é um losango com um ângulo reto; portanto, *KLIJ* é quadrado.

(T_{19d}) *A reta JL é paralela às retas AB e CD? Demonstre a sua afirmação.*

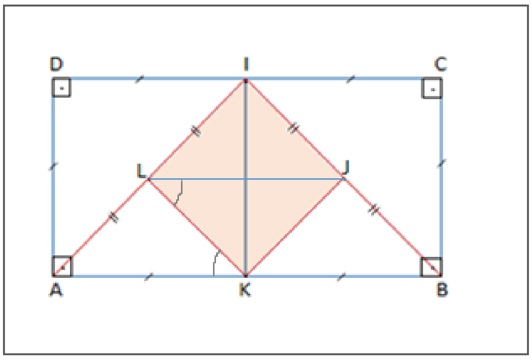

Figura 14: Figura suporte da tarefa T19c.
Fonte: Ferreira (2016, p.333)

Esta tarefa pode ser realizada utilizando base média do triângulo. Isto é, $\overline{LJ}$ é base média do triângulo *AIB*, logo, $\overline{LJ}//\overline{AB}$.

O aluno também poderá utilizar o fato de que $J\hat{L}K \equiv L\hat{K}A$, pois ambos medem 45º. Esta congruência implica no paralelismo das retas *LJ* e *AB.* Temos também que as retas *AB* e *CD* são paralelas, pois são retas suporte dos lados do retângulo *ABCD*. Logo, pela transitividade da relação de paralelismo, temos que as retas *LJ*, *AB* e *CD* são paralelas.

Esta tarefa além de oportunizar o aluno de conjecturar, pensar sobre a figura e associar as apreensões perceptiva e discursiva, pode nos dar a oportunidade de introduzir o conceito e a propriedade da base média do triângulo.

Tarefa 9: Seja *ABCD* um quadrado cujas diagonais interceptam-se no ponto *O* e *E* o ponto médio do segmento *BC*.

a) Construa o quadrado *CEFG* externo. Explique o seu algoritmo de construção.

b) *OBFC* é um quadrado? Por quê?

Análise a priori da tarefa 9

Objetivamos com esta tarefa, que o aluno possa utilizar as condições necessárias e suficientes sobre as diagonais de um quadrilátero para que este seja um quadrado, como forma de construí-lo.

(T_{09a}) *Construa o quadrado CEFG externo. Explique o seu algoritmo de construção.*

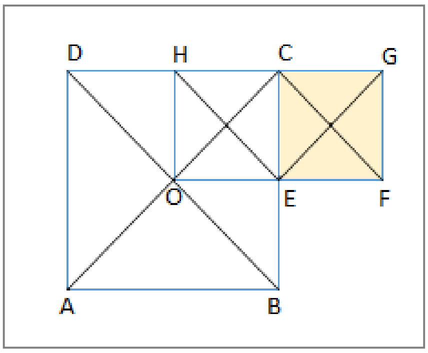

Figura 15: Figura suporte da tarefa T09a
Fonte: Ferreira (2016, p.334)

Seja *H* o ponto médio do lado *CD* do quadrado *ABCD*. Como *EC* = *CH* = *HO* = *OE* (*HOE* e *HCE* são triângulos retângulos, isósceles e congruentes) e $H\hat{C}E$ é reto, então *HCEO* é um quadrado. Desejamos construir um quadrado externo de lado *EC*, então o quadrado que buscamos é congruente a *HCEO*. Tracemos agora os segmentos *CF* e *EG*, congruentes ao segmento *CO*, e tais que $\overline{CF}$ e $\overline{EG}$ sejam congruentes, sejam perpendiculares e se interseccionem no ponto médio de ambos. Unindo os pontos *E*, *F*, *G* e *C*, vamos obter o quadrado externo *EFGC*.

(T_{09b}) *OBFC é um quadrado*? *Por quê*?

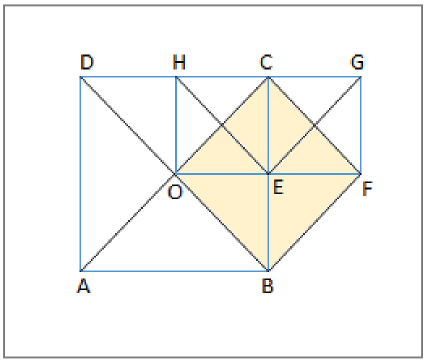

Figura 16: Figura suporte da tarefa T_{09b}
Fonte: Ferreira (2016, p.334)

Esperamos que os alunos utilizem a condição necessária e suficiente sobre as diagonais do quadrado para chegar à seguinte conclusão: o quadrilátero *OCFB* é tal que *EO* = *EC* = *EF* = *EB*, pois *E* é ponto médio do segmento *BC* e os quadrados *OECH* e *CEFG* são congruentes. Além disso, o ângulo $C\hat{E}F$ é reto, ainda pelo fato de *CEFG* ser quadrado. Logo, $\overline{BC}$ e $\overline{OF}$ são congruentes, se interceptam no ponto médio de ambas e são perpendiculares. Portanto, *OBFC* é um quadrado.

Pode ocorrer também de o aluno utilizar as congruências dos triângulos *EOC*, *EFC*, *OEB* e *EBF* e concluir que o quadrilátero *OBFC* possui os lados e os ângulos congruentes.

Com esta tarefa o aluno deverá demonstrar que dois quadriláteros são quadrados, sendo que estes estão apresentados em posições distintas. Esperamos que, ao aplicar esta tarefa, o aluno já tenha compreendido o estatuto de uma figura e não se apegue mais à apreensão perceptiva para classificar uma figura geométrica. Ou seja, esperamos que o aluno não classifique o quadrilátero *OBFC* como um losango não quadrado orientado pela apreensão perceptiva.

4 Considerações e perspectivas

Este estudo (parcial) trata da aprendizagem da geometria a partir de situações que envolvem demonstrações com alunos de um curso de licenciatura em matemática. O principal objetivo da pesquisa maior (FERREIRA, 2016) foi elaborar, aplicar e analisar uma organização didática que permitisse minimizar as dificuldades de alunos de licenciatura em matemática em compreender demonstrações em geometria.

Lembramos que, neste artigo, apresentamos a parte da organização didática que não tinha sido aplicada aos alunos, por razões de espaço e tempo. As tarefas analisadas têm como objetivo permitir ao aluno a utilização das definições dos quadriláteros e a aplicação de suas na resolução das situações propostas, e também trabalhar condições necessárias e suficientes, destacar hipótese e tese de um teorema e trabalhar teorema recíproco, assim como explorar a redação de um teorema.

Nas análises que propusemos, além da TAD, as fases exploratórias das diferentes tarefas, a articulação entre os registros de representação (tratamento e conversão) nos permitiram mostrar que não basta o aluno se basear na apreensão perceptiva para fazer uma validação formal das afirmações tecidas nas diferentes tarefas. É necessário que explore, principalmente as apreensões operatórias e discursivas da figura para vislumbrar caminhos que permitem a construção de provas intelectuais.

Neste sentido, Ordem (2015, p.305) mostra que

> [...] nem sempre conhecer bem os critérios básicos ou esquemas para a construção de uma demonstração é sinônimo de proficiência em demonstrações: uma estudante participante da pesquisa mostrou, em uma entrevista, conhecer bem as técnicas de uma demonstração, bem como o esquema para sua construção, mas não apresentou sequer uma demonstração válida das propriedades simples da geometria da escola secundária

> contempladas no estudo, na qual está sendo preparada para ensinar. Este resultado pode revelar que não adianta ensinar apenas regras enquanto não colocamos o futuro professor diante de tarefas que exigem que ele construa por si uma demonstração. Isso pode ser um resultado bastante significativo em apoio a tese de Healy e Hoyles[4] (1998) segundo a qual a capacidade de construir, avaliar ou escolher uma demonstração válida, não é simplesmente uma questão de realização matemática geral, mas uma habilidade que se constrói na prática.

Salientamos que as tarefas aqui apresentadas são direcionadas a alunos (ou professores) que já têm uma certa alfabetização no que tange às provas e à demonstração. Antes desses tipos de provas, sugerimos que a abordagem de conceitos matemáticos via provas e demonstrações seguisse um cenário apoiado em Balacheff (1982). Trata-se de propor níveis diversos de demonstrações de uma determinada proposição. Neste sentido, Cury e Hack (2000, p.2) afirmam que:

> [...] poderíamos começar por uma *explicação*, originada por um questionamento ou por um erro surgido em atividades de ensino. A seguir, procuraríamos fazer com que os alunos *provassem* a proposição, a partir do debate sobre as diversas ideias surgidas. Finalmente, tentaríamos apresentar a *demonstração*, que pode, ainda, ser focalizada sob diversos ângulos, mostrando ao aluno que as diversas áreas da Matemática não são estanques e que um determinado resultado pode ser validado pela Álgebra, pela Análise, pela Geometria etc.

Julgamos, portanto, pertinente distinguir os termos 'prova' e 'demonstração' de acordo com Balacheff (2000) e os níveis de prova segundo o mesmo autor, que são fundamentais para classificar os tipos de provas a ser realizados pelos alunos. Para isso, é preciso, entre outras coisas, desenvolver atividades, em ações de formação inicial e/ou continuada, que permitissem aos professores, também, perceber a necessidade desses processos para o ensino de conteúdos matemáticos.

Referências

ALMOULOUD, S.A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: UFPR, 2010.

ALMOULOUD, S.A.; MANRIQUE, A. L.; SILVA. M. J.F.; CAMPOS, T.M.M. A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, n. 27, p. 94-108, 2004. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/rbedu/n27/n27a06.pdf> Acesso em: 28 ago. 2015.

BALACHEFF, N. Aspects of proof in pupil's practice of school mathematics. In: PIMM, D. (Ed.). **Mathematics Teachers and Children**. London: Hodder and Stoughton, 1988. p. 216-235.

[4] HEALY, L.; HOYLES, C. **Justifying and Proving in School mathematics: Summary of the results from a survey of the proof conceptions of students in the UK. Research Report**. Mathematical Science, Institute of Education, University of London, 1998.

BALACHEFF, N. **Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas** (Trad. Pedro Gómez). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes, 2000. Disponível em: <http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/52/01/33/PDF/Balacheff2000Proceso.pdf>. Acesso em: 12 jan. 2013.

BALACHEFF, N. **The researcher epistemology:** a deadlock for educational research on proof. Les Cahiers du Laboratoire Leibniz, Grenoble, n. 109, 2004. Disponível em: < http://www-leibniz.imag.fr/LesCahiers/>. Acesso em: 12 jan. 2013.

BALACHEFF, N. Bridging knowing and proving in mathematics: A didactical perspective. In: HANNA, G.; JAHNKE, H. N.; PULTE, H. (Eds.). **Explanation and Proof in Mathematics, Philosophical and Educational Perspectives**. New York: Springer, 2010. p. 115-136. Disponível em: <http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4419-0576-5_9#page-2>. Acesso em: 12 de jan. 2013.

BONGIOVANNI, V. As diferentes definições dos quadriláteros notáveis. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 55, p. 29-32, 2004.

BONGIOVANNI, V. Sobre definições de trapézio isósceles. **Revista do professor de Matemática**, São Paulo, n. 72, p. 9-10, 2010.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. Tradução de Camila Bogéa. 1. ed. São Paulo: Ática, 2008.

BROUSSEAU, G. **La Theorie des Situations Didactiques**. Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal. 1997. Disponível em: <http://math.unipa.it/~grim/brousseau_montreal_03.pdf >. Acesso em: 22 de mars. 2014.

CHEVALLARD, Y. El análisis de las prácticas docentes en la teoria antropológica de lo didáctico. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 19, n.2, p. 221-266, 1999.

CURY, H. N.; HACK, N. F. R. As dificuldades dos alunos de licenciatura em matemática em relação às demonstrações: uma contribuição para as discussões. **Revista ADPPUCRS**, n. 1, p.61-72, 2000.

DUVAL, R. **Semiosis et pensée humaine**: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Peter Lang, 1995.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a Matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar**:** os registros de representação semióticas. 1 ed. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução: Méricles Thadeu Moretti, **Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 1, p.118-138, 2012.

FERREIRA, M. B. C. **Uma organização didática em quadrilátero que aproxime o aluno de licenciatura das demonstrações**. 2016. 342 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

FONSECA, C.; BOSCH, M.; GASCÓN, J El momento del trabajo de la técnica en la completación de Organizaciones Matemáticas: el caso de la división sintética y la factorización de polinomios. **Educación Matemática**, v. 22, n. 2, p. 5-34, 2010.

JONES, K. Theoretical frameworks for the learning of geometrical reasoning. **Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics**, London, v.18, n. 1 e 2, p. 29-34, 1998.

MAIOLI, M. **Uma oficina para formação de professores com enfoque em quadriláteros** 2002, 162f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

MARIOTTI, M.A. Proof and Proving in Mathematics Education. In: GUTIÉRREZ, A.; BOERO, P. **Handbook of research on the psychology of mathematics education**: Past, present and future. Rotterdam: Sense Publishers, 2006. p. 173-204.

MAZIERO, L.M., **Quadriláteros**: Construções geométricas com o uso de régua e compasso, 2011, 88f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

ORDEM, J. **Prova e demonstração em geometria plana**: concepções de estudantes da licenciatura em ensino de matemática em Moçambique. 2015. 325 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.

ROQUE, T. M. **História da Matemática**: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro, Zahar, 2012.

SILVA, A. F. da. **Desenvolvimento de uma sequência didática sobre quadriláteros e suas propriedades**: contribuições de um grupo colaborativo. 2007. 93 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

SANTAELLA, L. **O que é semiótica?** São Paulo: Brasiliense, 1983.

Recebido em: 03 de novembro de 2017.

Aceito em: 10 de dezembro de 2017.