ReBECEM Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática

# O CONTEÚDO DE LIMITE EM CURSOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA: UMA PESQUISA À LUZ DA TEORIA DOS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA

# THE CONTENT OF LIMIT IN MATHEMATICS TEACHER TRAINING COURSES: A RESEARCH IN THE LIGHT OF THE THREE WORLDS OF MATHEMATICS THEORY

Gabriel de Oliveira Soares[1]

Helena Noronha Cury[2]

**Resumo**: Neste artigo, são apresentados resultados parciais de uma pesquisa realizada em dois cursos de Licenciatura em Matemática do Rio Grande do Sul, com o objetivo de analisar o conceito de limite de uma função em um ponto, apresentado por estudantes desses cursos, bem como suas estratégias de resolução de questões, à luz da Teoria dos Três Mundos da Matemática. Primeiramente, foi realizada uma análise da introdução do conceito de limite em livros didáticos de Cálculo. Em seguida, foi feito um mapeamento de artigos sobre as ideias de David Tall, bem como uma busca de dissertações e teses que se basearam nessas ideias. Na última etapa, foi aplicado um teste sobre limites de funções a alunos que já haviam cursado a disciplina de Cálculo I e foram entrevistados docentes dessa disciplina nos dois cursos. Concluiu-se que a maior parte dos alunos utiliza a linguagem natural para conceituar limite, apresentando características do mundo corporificado, com alguns elementos simbólicos, mas sem atingir um desenvolvimento compatível com o mundo axiomático formal. Os professores declaram partir de exemplos gráficos e tabelas de valores de função para introduzir o conceito e só depois tentam chegar à definição formal.

**Palavras-chave**: Limites; Cursos de licenciatura em matemática; Três Mundos da Matemática.

**Abstract**: In this paper, we present partial results of a research carried out in two mathematics training courses at Rio Grande do Sul, aiming to analyze the concept of limit of a function at a point, presented by students of these courses, as well as their strategies of solving exercises in the light of the Theory of the Three Worlds of Mathematics. First, an analysis was made of the introduction of the limit concept in Calculus textbooks. Next, it was done a mapping of articles on David Tall´s ideas, as well as a search of dissertations and theses that where based on these ideas. In the last step, a test on limits of functions was applied to students who had already studied Calculus I and were interviewed professors of this subject in both courses. It was concluded that most of the students use the natural language to conceptualize a limit, presenting characteristics of the embodied world, with some symbolic elements, but without achieving a development compatible with the formal axiomatic world. Teachers introduce the concept from graphical examples and tables of function values and only then try to arrive at the formal definition.

**Keywords:** Limits; Mathematics teacher training courses; Three Worlds of Mathematics.

[1]Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Centro Universitário Franciscano (UNIFRA), Santa Maria, Rio Grande do Sul, Brasil. E-mail: gsoares8@outlook.com

[2]Doutora em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Professora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Centro Universitário Franciscano, (UNIFRA), Santa Maria, Rio Grande do Sul, Brasil. E-mail: curyhn@gmail.com

## 1 Introdução

A apresentação de conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral, especialmente do Cálculo I, em grades curriculares de cursos da área de Ciências Exatas, inicia muitas vezes pela noção e cálculo de limites de uma função. Livros didáticos de Cálculo, utilizados em cursos de Matemática ou de Engenharia, em geral apresentam uma revisão sobre funções e, em seguida, introduzem os conteúdos de Cálculo propriamente ditos com um capítulo sobre limites e continuidade (THOMAS, 2002; ANTON; BIVENS; DAVIS, 2007, entre outros).

No entanto, mesmo sendo discutida na maior parte das disciplinas de Cálculo I, a noção de limite é uma das que geram maiores dificuldades de aprendizagem por parte dos alunos. Os problemas podem estar ligados à noção intuitiva, à definição formal, ao cálculo de limites ou à metodologia empregada pelos professores, entre tantos fatores que vêm sendo investigados em pesquisas desenvolvidas no âmbito do Cálculo (TALL, 1993; ARTIGUE, 1995; REZENDE, 2003; ZUCHI; GONÇALVES, 2003; CAVASOTTO; VIALI, 2011; CUNHA; PINTO, 2014).

Na formação de professores de Matemática, o ensino de Cálculo traz a oportunidade de entender conceitos como a noção de infinito, os limites de funções, as áreas de figuras planas, entre tantos outros que estão relacionados a conteúdos matemáticos da educação básica. Assim, a avaliação dos conhecimentos de licenciandos em Matemática sobre tópicos de Cálculo, à luz da teoria dos Três Mundos da Matemática, pode trazer subsídios para o planejamento de atividades específicas em cursos de formação de professores de Matemática.

Com o objetivo de analisar o conceito de limite de uma função apresentado por estudantes de dois cursos de Licenciatura em Matemática, bem como suas estratégias de resolução de questões, à luz da Teoria dos Três Mundos da Matemática, foi desenvolvida uma pesquisa de mestrado em um Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Rio Grande do Sul. Neste artigo, são apresentados os pressupostos teóricos e resultados das três etapas desta investigação.

## 2 Pressupostos Teóricos

Dois dos constructos mais citados em pesquisas que se baseiam nas ideias de David Tall são "imagem de conceito" e "definição de conceito". Em sua *homepage*[3], este pesquisador comenta que os dois termos foram formulados em 1980, pelo investigador israelense Shlomo Vinner. Em uma visita de Vinner à Universidade de Warwick, quando Tall tinha uma enorme quantidade de dados compilados de alunos de graduação em Matemática que não conseguia analisar sob um ponto de vista matemático, essas ideias esclareceram os dados, o que os levou a publicar, em 1981, o artigo que é citado nas pesquisas como tendo originado esses constructos.

Tall e Vinner (1981, p. 152) usam

> [...] o termo *imagem de conceito* para descrever a estrutura cognitiva total que é associada ao conceito, que inclui todas as imagens mentais e propriedades e processos a ele associados. É construída ao longo dos anos por meio de experiências de todos os tipos, mudando à medida que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece (grifo dos autores).

Por exemplo, à menção da palavra "limite", um aluno pode evocar uma representação gráfica, uma maneira de calcular um limite em um ponto, mas não necessariamente a definição formal.

Já a definição de conceito pode ser "uma reconstrução pessoal de uma definição, feita por um aluno. É então a forma verbal que o estudante usa para sua própria explicação sobre sua imagem (evocada) de conceito" (TALL; VINNER, 1981, p. 152). No exemplo anterior, é a maneira como o aluno expressa "sua" definição de limite de uma função em um ponto.

Outros termos também encontrados nos trabalhos de Tall e colaboradores são "já-encontrado" e "a-encontrar"[4]. Lima e Tall (2008, p. 4) definem "já-encontrado" como "um constructo mental que um indivíduo usa em dado momento, baseado em experiências que ele encontrou anteriormente" e consideram que um "já-encontrado" pode influenciar a aprendizagem de forma positiva ou negativa. Por exemplo, o conhecimento já encontrado de que o polinômio $x^2 - 3x + 2$ pode ser fatorado em

$(x-1)(x-2)$ auxilia o aluno no cálculo de $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-3x+2}{(x-1)(x-2)}$ .

Lima e Tall (2008, p. 5) usam o termo "a-encontrar" para denotar "uma experiência encontrada posteriormente e que pode afetar a memória de conhecimentos

[3] http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/

[4] *Met-before e met-after*

prévios". Essa experiência também pode ser uma influência positiva ou negativa e Lima (2007) traz um exemplo do segundo caso: se o aluno aprende que a equação $x^2=a$, com $a\neq 0$ pode ser transformada em $x = \pm\sqrt{a}$, para expressar suas duas raízes reais, então ele pode concluir que $\sqrt{b^2} = \pm b$, obliterando o conhecimento anterior de que a extração da raíz quadrada de $b^2$ em $\mathbb{R}$ admite apenas o valor positivo.

A Teoria dos Três Mundos da Matemática, apresentada por Tall em sucessivos trabalhos (2004, 2008, 2013), tem sido empregada em algumas pesquisas realizadas no Brasil (LIMA, 2007; FREIRE, 2011; GALVÃO; SOUZA; POGGIO, 2015, entre outros). Em 2004, Tall buscou estabelecer uma teoria de desenvolvimento cognitivo, do recém-nascido ao adulto maduro, englobando três mundos do pensamento matemático, distintos, mas inter-relacionados, a saber: mundo conceitual corporificado, mundo proceitual simbólico e mundo axiomático formal.

Para desenvolver essa teoria, Tall (2004) revisitou discussões do grupo PME (Psicologia da Educação Matemática), passando pelas ideias de Piaget, Bruner, Skemp, van Hiele, Dubinsky e Lakoff, que o levaram ao que chamou de "possível caracterização do crescimento cognitivo" (p. 285). Com base em Tall (2004), são indicadas, a seguir, as características de cada um dos mundos:

1. o mundo conceitual corporificado "diz respeito às percepções acerca do mundo e o pensamento a respeito das coisas que são percebidas e sentidas não apenas no mundo físico, mas em um mundo mental de significados" (p. 285).
2. o mundo proceitual simbólico, "é o mundo dos símbolos que usamos para cálculo e manipulação em Aritmética, Álgebra, Cálculo, etc", que começa "com *ações* [...] que são encapsuladas como conceitos pelo uso dos símbolos, que nos permitem mudar sem esforço dos processos de *fazer* matemática aos conceitos para *pensá-la*" (p. 285, grifos do original).
3. o mundo formal axiomático "é baseado em propriedades, expressas em termos de definições formais que são usadas como axiomas para especificar as estruturas matemáticas (tais como 'grupo', 'campo', 'espaço vetorial', 'espaço topológico' e assim por diante)" (p. 285).

Lima (2013, p. 66) comenta que, segundo Tall, "esses meios de se pensar em Matemática não são estanques nem hierárquicos, mas podem se desenvolver com o tempo, e concomitantemente, tornando-se mais sofisticados a partir do uso da linguagem". Tall (2013) reafirma que o foco na corporificação do mundo real pode fazer sentido para os aprendizes iniciantes, dando significado às operações simbólicas, mas conteúdos matemáticos mais sofisticados exigem novas maneiras de pensar. Assim, no trabalho com estudantes de cursos superiores, especialmente com licenciandos em Matemática, é esperado que essa jornada pelos três mundos seja completa, chegando às definições e demonstrações formais.

## 3 Procedimentos Metodológicos

A pesquisa aqui relatada foi desenvolvida em três etapas, que proporcionaram elementos para a coleta e análise dos dados. Primeiramente, foi feita uma análise da abordagem do conceito de limite de uma função, em livros didáticos de Cálculo presentes nas ementas dos cursos de Licenciatura das duas Instituições de Ensino Superior (IES) envolvidas na investigação, à luz da teoria dos Três Mundos da Matemática. Em seguida, foi feito um mapeamento de artigos sobre as ideias de Tall em periódicos brasileiros, bem como uma busca de dissertações e teses que tiveram essas ideias como embasamento teórico. Na terceira etapa, foi aplicado um teste sobre limites de funções a alunos de dois cursos de Licenciatura em Matemática das IES envolvidas na investigação; a seguir, foram entrevistados dois docentes de Cálculo I dessas IES.

Participaram da pesquisa 14 alunos dos dois cursos de Licenciatura em Matemática, escolhidos por conveniência entre os que já tinham cursado Cálculo I e se dispunham a responder ao teste. Todos os alunos e os docentes assinaram Termo de Consentimento Livre e Esclarecido e a pesquisa está aprovada na Plataforma Brasil.

O teste elaborado contém sete questões abertas, sobre conceito e cálculo de limites e aplicação da noção em problemas, e as respostas foram analisadas à luz da teoria dos Três Mundos da Matemática.

As entrevistas foram semiestruturadas, com perguntas sobre tópicos especificados de antemão, conforme os interesses da pesquisa, mas permitindo a inserção de novas questões no decorrer da conversa. Como afirmam Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 120), a entrevista "serve para aprofundar o estudo, complementando outras técnicas de coleta de dados". As entrevistas tiveram lugar na respectiva IES de cada docente, em horário previamente agendado, tendo sido gravadas e transcritas para posterior análise.

## 4 Análise dos dados

Neste artigo, pela limitação de espaço, são sintetizados os resultados obtidos nas duas primeiras etapas e são detalhadas as análises das respostas a uma das questões do teste e das entrevistas.

### 4.1 Livros didáticos

Inicialmente, foram analisados os Projetos Pedagógicos de Curso (PPC) de cada um dos dois cursos de Licenciatura em Matemática das IES envolvidas na pesquisa, a fim de verificar quais bibliografias são recomendadas para a disciplina de Cálculo I e quais se repetem. Foram encontrados três livros didáticos comuns às bibliografias básica e complementar dos dois cursos: Leithold (1994), Anton, Bivens e Davis (2007) e Guidorizzi (2010).

A análise dos capítulos que tratam de limites ocorreu em duas fases: uma primeira, dedicada à introdução do conceito de limite, em busca de compreender como se dá esta abordagem, quais "já-encontrados" são necessários para a compreensão destes conceitos e quais características dos Três Mundos da Matemática são evidenciadas para um aluno que estuda por esse capitulo. Na segunda fase, foram avaliados os exercícios propostos, a fim de perceber que estratégias o estudante precisa desenvolver ao resolver a questão e como estão relacionadas aos Três Mundos da Matemática.

No livro de Leithold (1994), a introdução do conceito de limite é feita por meio do desenvolvimento de um exemplo específico, mostrando sua obtenção de forma intuitiva, priorizando o trato com aspectos visuais (gráfico e tabela), para exemplificar a aproximação do valor da função no ponto escolhido e a inserção das letras gregas $\varepsilon$ e $\delta$ para introduzir a definição formal.

Em relação aos exercícios, Leithold (1994) apresenta questões cujo objetivo é calcular o valor de $\delta$ para cada um dos limites propostos, além de argumentar sobre a descoberta desse valor. Alguns exercícios priorizam a demonstração formal. Um aluno que resolve esses exercícios pode desenvolver características do mundo proceitual simbólico e do axiomático formal, relacionando as construções com os valores de $\varepsilon$ e $\delta$ e desenvolvendo aspectos mais formais do que a aplicação do algoritmo para o calculo do limite.

Assim como em Leithold (1994), o livro de Anton, Bivens e Davis (2007) introduz o conceito de limite por meio da resolução de um exemplo e traz outros elementos, como o cálculo do valor de uma função em um determinado ponto. É necessário que o aluno consiga relacionar o comportamento da função a partir da visualização do seu gráfico e da tabela, sendo esperado, então, que seja capaz de compreender essas duas maneiras diferentes de representar a função. Em relação aos exercícios, muitas questões priorizam a construção gráfica da função e a obtenção do limite por meio desse gráfico. O aluno que estuda pelo livro de Anton, Bivens e Davis (2007) pode desenvolver características dos mundos conceitual corporificado e proceitual simbólico, bem como do mundo axiomático formal.

Ao analisar a introdução do conceito de limite no item 3.1 do capítulo 3 de Guidorizzi (2010), é possível verificar que está intrinsecamente ligada ao conceito de continuidade. Essa introdução é feita de maneira intuitiva, relacionando a visualização gráfica por meio da aproximação em torno do limite da função. Os exercícios presentes nessa introdução do livro exploram essas definições intuitivas e a relação entre limite e continuidade em um ponto. Somente no item 3.3 desse capítulo é apresentada a definição formal de limite de uma função em um ponto. O aluno que estuda o conceito de limite por este livro pode desenvolver características dos três mundos.

Na análise dos três livros, pode-se notar que em alguns exercícios há a intenção de reproduzir mecanicamente o algoritmo de resolução de determinado limite e, nesse sentido, pode-se questionar a influência dessa abordagem na compreensão dos conceitos pelos futuros professores de Matemática: terão eles oportunidade de desenvolver características do mundo axiomático formal em sua apropriação do conceito de limite? Considera-se que formalização de conceitos é fundamental para que esses futuros professores tenham clareza sobre as justificativas de muitos procedimentos matemáticos que vão explicar, futuramente, em suas aulas da escola básica.

## 4.2 Mapeamento de dissertações, teses e artigos

Para fazer um levantamento de dissertações e teses que têm se embasado nas ideias de Tall, foi acessado o site do banco de teses e dissertações da CAPES[5], inserindo

[5] http://bancodeteses.capes.gov.br/banco-teses/#!/

as expressões “David Tall” e “Três Mundos da Matemática”[6]. Foram encontrados 26 trabalhos, sendo três teses de doutorado e 23 dissertações, de mestrado acadêmico ou profissional. Essas produções foram defendidas de 2004 a 2016 e a distribuição por anos está indicada na Figura 1:

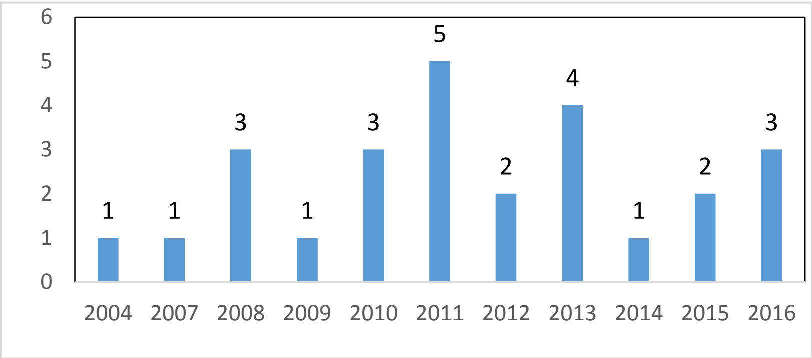



**Figura 1:** Distribuição das dissertações e teses por ano
**Fonte:** dados da pesquisa

As primeiras produções, Giraldo (2004) e Lima (2007), são teses cujos autores realizaram período de estudos na Universidade de Warwick, Inglaterra, sob a orientação de David Tall; ao concluírem as teses no Brasil, esses pesquisadores passaram a difundir as ideias desse teórico inglês e orientar dissertações fundamentadas em suas ideias.

Efetivamente, a distribuição das produções por IES de origem (Figura 2) mostra que a maior quantidade de trabalhos provém da Universidade Anhanguera de São Paulo, onde a Dra. Rosane Lima orienta no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, seguida da Universidade Federal do Rio de Janeiro, instituição de origem do Dr. Vitor Giraldo.

[6] A inserção de outras palavras ou expressões, como “imagem de conceito” ou “definição de conceito” levaram às mesmas produções já detectadas com o uso das duas expressões citadas.

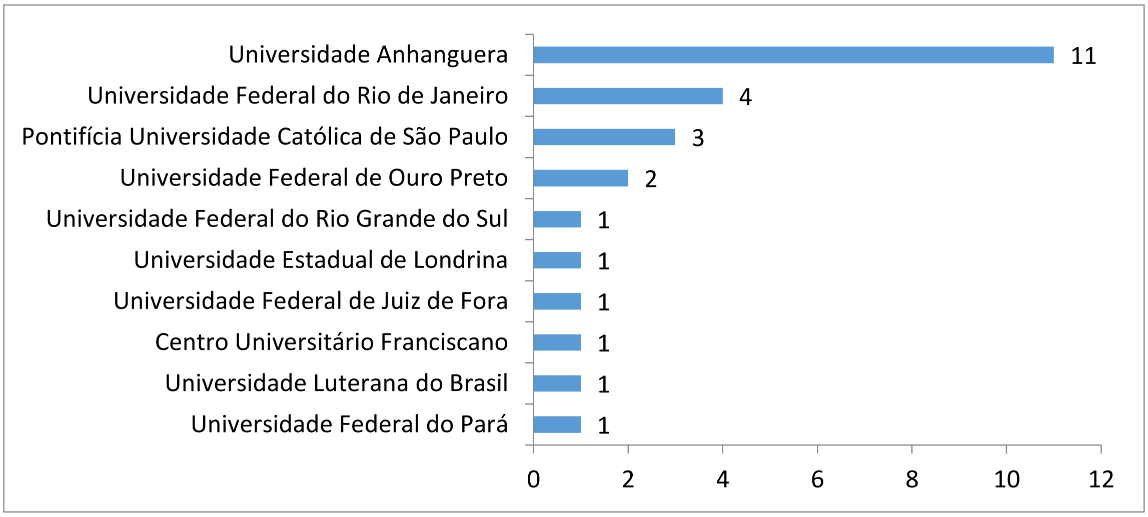



**Figura 2:** Distribuição das dissertações e teses por IES
**Fonte:** dados da pesquisa

A leitura dessas 26 produções permite identificar as principais ideias de Tall que embasaram as investigações: imagem de conceito; definição de conceito e teoria dos Três Mundos da Matemática. Em algumas produções, essas três ideias são apresentadas, sendo que, em alguns casos, ainda são citados outros constructos atribuídos a Tall.

Para o mapeamento de artigos, foi acessada a Plataforma Sucupira e nela foram buscados periódicos brasileiros classificados no quadriênio 2013-2016, na área de Ensino, nos níveis A1, A2 e B1. Nos *sites* desses periódicos, escolhemos aqueles que dispõem do recurso "pesquisa" (ou "busca"), para inserir, novamente, as expressões "David Tall" e Três Mundos da Matemática". Foram encontrados 19 artigos: um deles é teórico, um teoriza sobre dados já coletados em outra investigação e os demais relatam pesquisas realizadas pelos autores.

Os artigos foram publicados de 2009 a 2017 e a maioria das pesquisas tem, como participantes, alunos de ensino superior, especialmente de cursos de Licenciatura em Matemática. As teorizações de Tall mais citadas são, também, "imagem de conceito", "definição de conceito" e "Três Mundos da Matemática". Muitos dos artigos encontrados são relatos das pesquisas de mestrado ou doutorado já indicadas no mapeamento de dissertações e teses.

### 4.3 Respostas a uma questão do teste

O teste aplicado a 14 alunos de Licenciatura em Matemática é composto por sete questões; levando em conta o fato de que esses participantes são futuros professores, as duas primeiras questões envolvem também justificativas sobre as definições apresentadas e sobre os exemplos que melhor introduzem a noção de limite, na opinião dos respondentes. Já as cinco questões restantes solicitam cálculos de limites ou aplicações do conceito, tendo em vista a melhor abordagem para o ensino desses conteúdos, tanto em tópicos da educação básica como do ensino superior.

Neste texto, são apresentadas e analisadas as respostas à questão 1, que envolve o foco da investigação, a saber, o conceito de limite; seu enunciado é o seguinte: *No decorrer do trabalho com as disciplinas de Cálculo você, provavelmente, foi apresentado ao conceito de limite de uma função, seja por aspectos visuais, simbólicos, gráficos ou por definições formais. Levando em consideração a importância desse conceito para o estudo do Cálculo, explique o que significa dizer que, dada uma função $f$, o limite de $f(x)$, quando $x$ tende para um número $a$, é igual a $L$.*

Dois alunos deixaram em branco a questão 1 e, para evitar identificação, as respostas dos demais foram nomeadas por A1, A2, ..., A12, sendo apresentadas na íntegra, para posterior análise. Quando possível, essas respostas foram digitadas, conservando a linguagem da forma como foi enunciada pelo licenciando; em alguns casos, foi feita a opção de *escanear* a resposta, para ser fiel à figura desenhada pelo respondente:

A1: *O limite de uma função é o valor o qual essa função se aproxima, tanto pela direita quanto pela esquerda em um gráfico.*

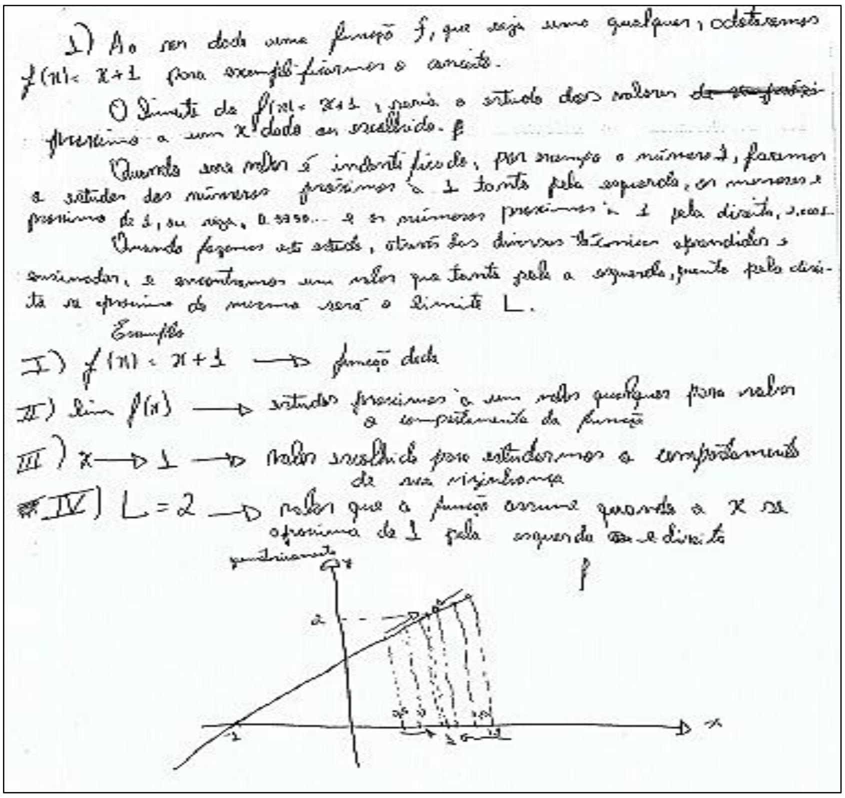
A2: *O limite de uma função é o valor pelo qual a mesma se aproxima do limite, a depender da variável que está tendendo. Ou seja, esse valor sempre chegará próximo do limite, tanto pelo limite à direita, quanto esquerda.*

É possível perceber que esses alunos compreendem a existência do limite de uma função em um ponto por meio da existência e igualdade dos limites laterais, mas mesmo assim não conseguem expressar o conceito de maneira matematicamente correta. Utilizam a linguagem natural e, como as respostas são pautadas na existência dos limites laterais e da aproximação, essas apresentam características do mundo conceitual corporificado.

A3: *Significa dizer que quando um número x está muito próximo do número a, estes dois da reta real, a imagem f(x) estará muito próxima do número L. A cada x que fica a uma distância de a, essa distância fica menor e menor, perto de zero, enquanto a distância de f(x) a L fica também menor e menor, ficando perto do zero.*

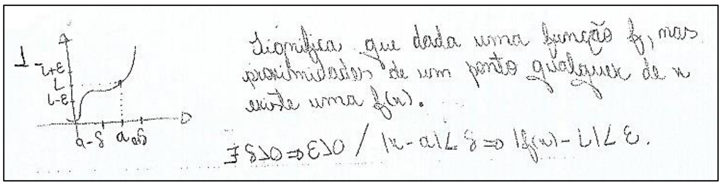
Esse aluno parece compreender o conceito de limite de uma função em um ponto baseado nas distâncias entre valores da variável x e das suas imagens pela f. Utiliza linguagem natural para definir limite e destaca a proximidade dos valores do ponto e do limite. A construção do conceito de limite desse aluno apresenta características do mundo conceitual corporificado.

A4:



Essa resposta, ainda que traga elementos dos mundos conceitual corporificado e proceitual simbólico, mostra que o aluno precisa de um exemplo para conseguir apresentar o que entende por limite de uma função em um ponto, não atingindo, portanto, o mundo axiomático formal.

A5:



Este aluno lembra a definição de limite de uma função em um ponto, trazendo elementos corporificados (o gráfico) e formais, lembrando os "épsilons e deltas" envolvidos na formalização; no entanto, em linguagem natural ou matemática, não é capaz de expressar o que o gráfico sugere.

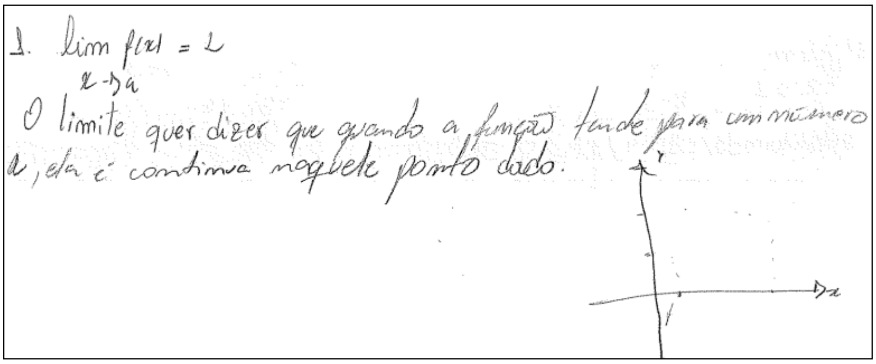
A6: *Significa dizer que quando os limites pela direita e pela esquerda "vão" para um mesmo valor, quando existem esses limites laterais vai existir o limite, caso contrário, não. Portanto, limite significa verificar o "comportamento" da função f(x) tende ao ponto a.*

Novamente a definição de limite de uma função em um ponto baseia-se na existência dos limites laterais. A linguagem é natural, evidenciando pouco desenvolvimento de uma linguagem matemática correta. A resposta é confusa, quando o aluno indica que "o "comportamento" da função f(x) tende ao ponto *a*, pois aparenta ter dificuldade de perceber qual dos pontos pertence ao domínio da função e qual pertence à imagem. Sua resposta tem apenas características do mundo conceitual corporificado.

A7: *Se você tem uma função qualquer, o limite dessa função vai ser quando o x tender para um número é igual a L.*

Nesse caso, o aluno mostra não ter a noção de limite de uma função, além de confundir a variável do domínio com a da imagem; sua resposta, em linguagem natural incorreta, não atende sequer às características mínimas do mundo corporificado.

A8:




Este aluno, respondendo em linguagem natural e tentando ilustrar com um gráfico, se confunde, pois parece entender que, se a função tem limite em um ponto, ela é contínua naquele ponto, o que não é verdade, pois a continuidade exige, além da existência do limite no ponto, a existência da própria função naquele ponto e a igualdade entre o valor do limite no ponto e o valor da função no mesmo ponto.

A9: *À medida que x se aproxima de um certo valor no eixo das abscissas, a função irá tender a L, porém deve-se cuidar os locais no gráfico aonde surgem saltos na função e aí para haver limite, os limites laterais devem ser iguais.*

O aluno parece lembrar a definição intuitiva, pois menciona a aproximação, mas também recorre à ideia da igualdade dos limites laterais. Quando aponta os "saltos" no gráfico, mostra que precisa dos elementos corporificados para expressar o que compreende por limite de uma função em um ponto.

A10: *Se uma função tem determinado limite, com x tendendo a um valor, seu limite... Infelizmente cheguei à conclusão que não consigo entender parte de limites.*

Este aluno tenta lembrar a definição, mas nota que não consegue expressá-la, nem em linguagem natural. Assim, justifica a falta de resposta pela incompreensão do conceito.

A11: *Para que* $lim_{x \to a} x = L$ *exista,* $\lim_{x_-} x = lim_{x_+ \to a} x = L$ *deve ser verdade.*

A12: *O limite da função f(x), quando x tende a um número real, se e somente se, os números reais de f(x) para os valores de x, que permanecem mais próximos de f(x).*

Essas duas respostas mostram um desconhecimento do significado de limite de uma função em um ponto; A11 usa símbolos, mas não traz a definição, apenas reproduz, de forma incompleta, o que Anton, Bivens e Davis (2007, p. 107) chamam de relação entre limites laterais e bilaterais. Sua resposta tem características do mundo operacional simbólico. Já o aluno A12 tenta usar uma linguagem supostamente matemática ("se e somente se", "x tende a um número real"), mas mostra não entender o significado de limite de uma função em um ponto, porque a frase fica sem sentido.

A definição de limite pode ser apresentada de forma intuitiva, inicialmente, mas depois exige a formalização. Por exemplo, em um dos livros usados nesses dois cursos de Licenciatura em Matemática, lê-se inicialmente uma definição de um ponto de vista informal: "Se os valores de f(x) puderem ser tornados tão próximos quanto queiramos de L, desde que tomemos os valores de x suficientemente próximos de $a$ (mas não iguais a $a$), então escreveremos $\lim_{x \to a} f(x) = L$" expressão que também pode ser escrita como "f(x) →L quando x → a" (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2007, p. 104).

Os mesmos autores ainda trazem as definições informais de limites laterais e, depois de explorar exemplos e exercícios sobre limites, apresentam a definição formal:

> Seja f(x) definida em todo x de algum intervalo aberto que contenha o número a, com a possível exceção de que f(x) não precisa estar definida em a. Escreveremos $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, dado qualquer número ε>0, pudermos encontrar um número $\delta$>0 tal que |f(x)-L|<ε se 0<|x-a|<$\delta$. (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2007, p.135).

Messias (2013), em sua pesquisa de mestrado, também aplicou um instrumento de investigação a alunos de Licenciatura em Matemática e, em uma questão, solicitou uma definição para $\lim_{x \to a} f(x) = c$ . A autora classificou as respostas dos alunos em cinco categorias[7]. As duas primeiras categorias envolvem as respostas que consideram ser o limite um valor, que pode (ou não) ser alcançado. A terceira categoria inclui respostas que evocam a ideia de aproximação. Na quarta categoria, há apenas uma resposta, de um aluno que considerou ser o limite igual ao valor da função no ponto. Finalmente, na quinta categoria, estão as respostas formais, como a definição citada em Anton, Bivens e Davis (2007). É possível notar semelhanças com as respostas indicadas pelos participantes da pesquisa relatada neste artigo, no caso de alunos que mencionam proximidade ou que tentam apresentar uma definição formal.

Messias (2013) tinha como objetivo investigar os elementos que compõem a imagem conceitual de licenciandos em Matemática, inferidas a partir de aspectos relacionados com o conceito de limite e seus dados não levam em conta a Teoria dos Três Mundos da Matemática, ainda que estejam analisados sob a ótica de ideias de Tall. Mas é possível notar que os participantes de sua pesquisa buscam, nesta questão, responder por meio da linguagem natural, mostrando elementos do mundo corporificado, bem como por meio da definição formal, com características do mundo formal. Qualquer comparação, no entanto, precisaria levar em conta o contexto, ou seja, o livro-texto utilizado, a forma como os professores abordam o conceito, etc.

Ainda que, metodologicamente, seja conveniente passar pelas características corporificadas e simbólicas da definição de limite, antes da apresentação da definição formal, é esperado que essa jornada pelos três mundos seja completa, como sugere Tall (2013).

### 4.4 Entrevistas com os docentes de cálculo

Para investigar como ocorre o trabalho em sala de aula com os livros didáticos elencados nas ementas da disciplina de Cálculo I dos dois cursos de Licenciatura em Matemática e o quanto estes influenciam a aprendizagem dos estudantes, foram realizadas as entrevistas semiestruturadas com dois professores de Cálculo I. Os docentes são nomeados apenas por “professor A” e “professor B”, sem inserção de nome ou gênero,

[7] Há ainda uma sexta categoria que inclui as respostas em branco.

para evitar identificação. A partir da transcrição, foram obtidos os dados apresentados e analisados a seguir.

Ambos os docentes são licenciados em Matemática; o professor A concluiu o ProfMat (Mestrado Profissional em Matemática em Rede) e trabalha com a disciplina de Cálculo I há dois semestres. O professor B tem mestrado em Matemática, voltado para a Matemática Aplicada, atualmente cursa Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática e trabalha com a disciplina de Cálculo I desde 2012.

Na IES do professor A, a disciplina de Cálculo I é ministrada separadamente para o curso de Licenciatura em Matemática; dessa forma, conforme o entrevistado, fornece suporte teórico ao futuro professor, para que ele possa entender os conteúdos que vai lecionar na educação básica.

Já na IES do professor B, a disciplina é ministrada também para os cursos de Engenharia, mas, na turma em que são matriculados os alunos de Licenciatura, o professor procura relacionar os conteúdos com tópicos da educação básica. O professor B exemplifica com o ensino da derivada que, segundo ele, leva o aluno a retomar o coeficiente angular da reta.

Ao serem questionados sobre as metodologias e recursos utilizados em suas aulas, ambos os professores afirmam que usam, em geral, uma “metodologia tradicional”, com apoio do quadro, giz e listas de exercícios. Mas também afirmam que, se possível, empregam algum recurso tecnológico, especialmente o GeoGebra, para “*mostrar alguma coisa referente à compreensão gráfica dos conceitos*” (professor A) ou para “*trabalhar com transformações de funções*” (professor B).

Em seguida, foi perguntado aos professores como planejam as aulas ao introduzir um conteúdo de Cálculo: se usam linguagem natural, figuras ou simbologia matemática. O professor A afirma que não prioriza alguma forma, pois depende do conceito a ser apresentado. “*Normalmente a simbólica fica por último, porque aos alunos, embora estejam no terceiro semestre da licenciatura, falta ainda o domínio de simbologia*”. E acrescenta, ainda, que a “*parte modular é bem complicada*” e que procura usar gráficos para depois apresentar a definição com símbolos, ou seja, a definição formal de limite.

O professor B responde que procura partir de situações-problemas, dando o exemplo do conteúdo de função: “*se o aluno consegue definir o que é função nas palavras dele, então eu formalizo a definição de uma forma mais acadêmica*”. E mais adiante, referindo-se ao limite de uma função, comenta que também inicia com uma situação-problema ou com um gráfico. “*Às vezes eu utilizo o gráfico e a gente vai fazendo* *aproximações sucessivas, ou então faz por tabelas também*"; se os alunos mostram dificuldade em compreender, ele afirma: "*faço primeiro por aproximação, depois eu faço pela figura e depois o gráfico. E daí a gente define limite com as próprias palavras e eu formalizo*".

O próximo questionamento abordou o uso do livro-texto e a escolha feita pelo professor, a partir da bibliografia indicada na ementa. O professor A afirma seguir mais o livro de Guidorizzi, mas complementa com outros, se necessário. Cita o exemplo da definição de limite que, segundo ele, não é apresentada no livro do Guidorizzi e que então busca o livro do Leithold, "*porque traz uma boa definição, explicações de como se faz para mostrar um limite pela definição*".

O professor B utiliza o livro do Stewart[8] como referência principal, por considerar que "*tem uma linguagem que não é tão formal e é mais próxima do aluno*", mas também o livro do Anton, Bivens e Davis.

A partir da resposta anterior, foi perguntado aos entrevistados como eles utilizavam o livro em sala de aula. O professor A comenta que utiliza o livro do Guidorizzi porque o considera desafiador, já que ele não mostra como chega a certos resultados, o que faz com que ele tenha que se preparar melhor para abordá-los em aula. "*Quando eu levo para a sala de aula, eu já levo o meu planejamento separado do livro e o livro vai junto comigo. Então, qualquer coisa que eu preciso, eu consulto no livro*". Para os alunos, o professor faz uma seleção dos exercícios que considera mais adequados à maneira como trabalha: "*eu sempre seleciono, porque às vezes tu trabalha de um jeito e há certos exercícios que puxam de outro e nós precisaríamos de mais tempo para trabalhar dessa forma*". Complementando a resposta, o professor A ainda comenta: "*se o aluno nota que a maneira de resolver um exercício é diferente da que foi feita em aula, a gente começa a discutir porque no livro estava de um jeito e eu explico de outra e isso faz com que eles ampliem mais as ideias sobre certos assuntos*".

O professor B, respondendo sobre a mesma questão, explica que procura não se deter em um único livro, por achar que a aula ficaria "*muito engessada. Eu olho, se eu vou trabalhar com limite, em qual dos livros está melhor exposto, qual exemplo é melhor*". Mas este professor acrescenta que leva em conta as características do aluno daquela turma, para decidir se vai abordar primeiramente a definição ou se trabalha mais com exemplos.

[8] STEWART, J. **Cálculo**. São Paulo: Pioneira Thompson Learning, 2001.

Sobre a influência do livro didático na aprendizagem dos conceitos de Cálculo, o professor A considera ser pequena, porque o aluno é muito dependente do professor, da forma como o professor explica o conceito e não da leitura que faz no livro. Acha que, para ser influenciado pelo livro, o aluno precisaria ter um conhecimento básico mais aprofundado, para então buscar as demonstrações no livro.

O professor B acredita que o livro ajuda bastante na aprendizagem, mas nota, atualmente, que os alunos estão mais focados na Internet e isso o preocupa um pouco, pois considera que "*eles pegam informações que às vezes não são verdadeiras*". Então orienta o aluno a buscar na Internet a versão de algum livro em pdf, mas nota que eles também utilizam bastante as videoaulas, pois "*às vezes o aluno não consegue aprender lendo, mas consegue aprender ouvindo outra pessoa*". E conclui que cada pessoa tem um método com o qual consegue aprender, mas tem que aprender a estudar.

Para comparar a análise dos livros didáticos constantes das ementas (realizada na primeira etapa da pesquisa) com a opinião dos professores sobre os livros que utilizam em sala de aula, foi-lhes perguntado como viam a abordagem do conteúdo de limites nos livros que são referência para a disciplina de Cálculo I e quais características são mais evidenciadas (trabalho com funções e tabelas, construção gráfica, aspectos mais formais). O professor A, inicialmente, tece algumas considerações sobre as dificuldades que encontra pelo fato de ter que revisar conteúdos sobre funções antes de trabalhar com limites; em seguida, comenta que no livro do Guidorizzi, especificamente, "*precisa de um apoio para que o aluno consiga compreender tudo, pela linguagem do livro*". O entrevistador/pesquisador questiona se a linguagem é mais formalizada e o respondente confirma, mas acrescenta:

> *Como é um livro mais direto, ele não tem tanta coisa para desviar nossa atenção. Eu penso nos outros livros, o do Anton, por exemplo, que tem muito mais informações...Se eu trabalhasse com essa bibliografia, os alunos acabariam se desviando demais, não sabendo qual é o foco principal. Por isso, embora o Guidorizzi tenha essa questão de ter mais formalização, menos explicações detalhadas, ele não tira tanto o foco para outros assuntos, que fazem parte da disciplina, mas que a gente pode trabalhar depois na forma de exercícios.*

O professor B comenta que os livros apresentam exemplos, nem sempre contextualizados; cita o livro do Stewart, que trabalha com aproximações e depois vai para a formalização. Julga que o livro do Stewart é um pouco mais fácil do que o do Anton, em termos de linguagem, pois coloca a formalização, o exemplo algébrico e o gráfico. E, nos exercícios, traz uma parte mais aplicada, à economia, à engenharia. Questionado sobre o tipo de exercícios que encontra no livro citado, o professor B considera que, no início, são muito do tipo "*calcule, calcule o limite, calcule, calcule*". Mas depois vai crescendo o nível de dificuldade e o aluno precisa saber interpretar. Portando, segundo ele, o aluno "*aprende a calcular, ele aprende a definição, aprende uma parte mais visual, aprende a calcular e quando ele sabe calcular, vai para a interpretação e alia os dois, interpreta e calcula*".

## 5 Considerações finais

Nas etapas desta investigação aqui relatada, é possível notar que já há muitas produções, tanto dissertações e teses como artigos, que empregam os pressupostos de Tall em suas análises; em especial, chama a atenção o fato de que a maior parte dos trabalhos foi realizada com alunos de cursos de Licenciatura em Matemática.

Também se destaca o fato de que os livros didáticos analisados, em seus capítulos introdutórios, fazem apelo a características dos três mundos da Matemática, buscando exemplificar as afirmativas intuitivas por meio de gráficos ou tabelas de valores de uma função, usando simbologia matemática na descrição das construções, para finalmente abordar a definição formal de limite de uma função em um ponto. Os professores entrevistados mostram preocupação com a aprendizagem dos alunos e discorrem sobre a forma como introduzem o conceito de limite, indicando, também, que passam pelos mundos corporificado e simbólico para tentar chegar ao mundo formal.

No entanto, ao analisar as respostas dos licenciandos, é possível notar suas dificuldades na conceituação de limite. De alunos que haviam concluído Cálculo I há pouco tempo e estavam cursando outras disciplinas de Cálculo que retomam a definição formal, era esperado que apresentassem a definição de limite de uma função em um ponto com características dos mundos corporificado, simbólico e formal, pois a passagem pelos três mundos favorece a compreensão dos conceitos e traz ideias para o trabalho na escola básica, em conteúdos que têm a noção de limite como pressuposto. No entanto, as dificuldades, de linguagem natural ou matemática, não permitem considerar que o conceito de limite seja um "já-encontrado" que possa influenciar positivamente a aprendizagem de outros conteúdos.

Sugere-se que os docentes de cursos de Licenciatura em Matemática, bem como os pesquisadores interessados em investigar o ensino e a aprendizagem em tais cursos, aprofundem os estudos sobre as ideias de Tall, especialmente sobre os Três Mundos da Matemática. Seria desejável elaborar propostas de novas abordagens para os conceitos de limite, continuidade e derivada de uma função, com apelo a características dos mundos corporificado, simbólico e formal, para auxiliar os alunos a desenvolver imagens de conceito que sejam compatíveis com as que são aceitas pela comunidade matemática.

Também seria interessante analisar a proposta da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) para a Matemática e discutir com os futuros professores as unidades temáticas, os objetos de conhecimento e as habilidades essenciais sugeridas no documento, para verificar como características dos Três Mundos da Matemática nele se apresentam. Os resultados da pesquisa aqui relatada, bem como de outras investigações já realizadas ou em andamento, podem embasar o debate sobre como se aprende a pensar matematicamente.

## Referências


ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo**. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.

ARTIGUE, M. La enseñanza de los princípios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In: ARTIGUE, M. et. al. **Ingeniería Didáctica em Educación Matemática**. Bogotá: Grupo Editorial IberoAmérica, 1995. p. 97-140.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Terceira versão. Brasília: MEC, 2017.

CAVASOTTO, M.; VIALI, L. Dificuldades na aprendizagem de cálculo: o que os erros podem informar. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 59, p. 15-33, jul./dez. 2011.

CUNHA, S. R.; PINTO, M. M. F. O conhecimento esperado sobre limites e continuidade a partir de uma análise das provas unificadas de Cálculo I na UFRJ. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 16, n. 1, p. 259-278, 2014.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

FREIRE, P. C. **Uma jornada por diferentes mundos da Matemática**: investigando os números racionais na forma fracionária. 2011. 194 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2011.

GALVÃO, M. E. E. L.; SOUZA, V. H. G. de.; POGGIO, A. M. P. P. Características dos três mundos da Matemática que emergem na resolução de um problema de proporcionalidade direta. In: CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 14, 2015, Chiapas, Mexico. **Actas**... Chiapas, 2015. s. p. Disponível em: <http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/456/211>. Acesso em: 24 set. 2017.

GIRALDO, V. **Descrições e conflitos computacionais**: o caso da derivada. 2004. 221p. Tese (Doutorado em Engenharia de Sistemas e Computação) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994.

LIMA, R. N. de. **Equações algébricas no ensino médio**: uma jornada por diferentes mundos da matemática. 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

LIMA, R. N. de. How humans learn to think mathematically. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo n. 40, p. 65-68, nov. 2013.

LIMA, R. N. de; TALL, D. Procedural embodiment and magic in linear equations. **Educational Studies in Mathematics**, n. 67, p. 3-18, 2008.

MESSIAS, M. A. de V. F. **Um estudo exploratório sobre a imagem conceitual de estudantes universitários acerca do conceito de limite de uma função**. 2013. 133 p. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2013.

REZENDE, W. M. **O ensino de cálculo**: dificuldades de natureza epistemológica. 2003. 468 p. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

TALL, D. Students´difficulties in calculus. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 7, 1992, Québec, Canada. **Proceedings…** Québec: Université Laval, 1993. p. 13-28.

TALL, D. Thinking through three worlds of mathematics. In: INTERNATIONAL CONFERENCE FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 28, 2004, Bergen, Norway. **Proceedings…** Bergen: PME, 2004. p. 281–288.

TALL, D. The Transition to Formal Thinking in Mathematics. **Mathematics Education Research Journal**, n. 2, v. 20, p. 5-24, 2008.

TALL, D. **How humans learn to think mathematically.** Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

TALL, D. O.; VINNER, S. Concept Image and Concept Definition in Mathematical with particular reference in Limits and Continuity. **Educational Studies in Mathematics**, n. 12, p. 151-169, 1981.

THOMAS, G. B. **Cálculo**. 10. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2002.

ZUCHI, I; GONÇALVES, M. B. Investigação sobre os obstáculos de aprendizagem do conceito de limite. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 31, 2003, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: ABENGE, 2003. p. 2-11.

**Recebido em:** 05 de novembro de 2017.

**Aceito em:** 15 de dezembro de 2017.