

**A MATEMÁTICA APLICADA À ASTRONOMIA PARA O ENSINO BÁSICO:
CONCEPÇÕES DE DISCENTES E RELATO DE EXPERIÊNCIA DE UMA
OFICINA**

**MATHEMATICS APPLIED TO ASTRONOMY IN THE FRAMEWORK OF
BASIC EDUCATION: CONCEPTIONS OF DISCENTS AND EXPERIENCE
REPORT OF A WORKSHOP**

Luana Paula Goulart de Menezes¹

Mariana Moran²

Eduardo de Amorim Neves³

Michel Corci Batista⁴

Resumo: Neste artigo relatamos uma experiência de realização de uma oficina para um grupo de 30 estudantes do Ensino Fundamental e Médio que participaram de um projeto de extensão da Universidade Estadual de Maringá (Paraná) denominado TIME – Teoria e Investigação em Matemática Elementar. Na oficina relacionamos matemática e astronomia com uma proposta de construção do instrumento Quadrante. Ademais, com a finalidade de entender as concepções dos discentes sobre geometria nãoeuclidiana e conhecimentos sobre astronomia, elaboramos um questionário respondido previamente. A investigação efetuada se baseou nos pressupostos da pesquisa qualitativa do tipo descritiva. As nossas observações mostram que o trabalho com a astronomia possibilitou aos estudantes desenvolverem noções sobre geometria não euclidiana e euclidiana para o entendimento do funcionamento do instrumento. Além disso, testificamos a fragilidade relacionada ao pouco conhecimento dos estudantes da Educação Básica no que diz respeito aos conceitos básicos de Astronomia.

Palavras-chave: Geometria não Euclidiana; Astronomia de Posição; Instrumento Astronômico.

Abstract: In this article we report an experience of conducting a workshop aimed at a group of 30 elementary and high school students who participated in an extension project at the State University of Maringá (Paraná) called TIME – *Teoria e Investigação em Matemática Elementar* (Theory and Research in Elementary Mathematics). In the workshop we related mathematics and astronomy to a proposal to build the Quadrant instrument. Furthermore, in order to understand students' conceptions about non-Euclidean geometry and knowledge about astronomy, we prepared a questionnaire previously answered. The investigation carried out is based on the assumptions of qualitative research of the descriptive type. Our

¹Mestra em Matemática (UEM).Doutoranda em Educação para a Ciência e a Matemática (PCM), Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Paraná, Brasil. E-mail: lluanagoulart@gmail.com.

²Doutora em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Estadual de Maringá (UEM). Professora Adjunta da Universidade Estadual de Maringá, Maringá, PR, Brasil. E-mail: mbarroso@uem.br.

³Doutor em Matemática, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Professor Adjunto da Universidade Estadual de Maringá, Maringá, PR, Brasil. E-mail: eaneves@uem.br.

⁴Doutor em Educação para a Ciências pela Universidade Estadual de Maringá (UEM). Professor Adjunto da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus de Campo Mourão, Campo Mourão, PR, Brasil. E-mail: michel@utfpr.edu.br.

observations show that working with astronomy enabled students to develop notions about non-Euclidean and Euclidean geometry to understand how the instrument works. In addition, we testify the fragility related to the lack of knowledge of Basic Education students regarding the basic concepts of Astronomy.

Keywords: Non-Euclidean Geometry; Positional Astronomy; Astronomical Instrument.

1 Introdução

Quando o assunto é astronomia é quase uma unanimidade o interesse e o fascínio das pessoas pelo tema, talvez seja simplesmente pela beleza das estrelas, talvez por despertar um lado romântico e poético, as lendas que a permeiam, a relação sublime com o divino, ou de forma mais pragmática a tentativa de entendimento do universo por meio da ciência.

No Ensino, diversas pesquisas, como Vieira, Batista e Coneglian (2020) mostram como atividades com o tema astronomia podem desenvolver o trabalho cooperativo e a mobilização de estratégias de resolução de problemas. Em uma revisão da literatura buscando justificativas para o ensino da astronomia, Langhi e Nardi (2014) mostram que pesquisadores da área ressaltam a importância do tema no ensino básico. Além disso, no levantamento que fizeram existem subsídios que podem fundamentar reflexões sobre sua abordagem nas escolas, reformular o currículo e modelar a formação de professores tanto inicial quanto continuada (LANGHI; NARDI, 2014).

Ademais, atrelada à astronomia podemos verificar que a matemática é uma importante área do conhecimento que alargou o âmbito das observações, desenvolvendo instrumentos de acordo com as novas realidades descobertas:

A Matemática respondeu a essas necessidades (nalguns casos por antecipação) desenvolvendo instrumentos (trigonometria, álgebra, trigonometria esférica, cálculo vectorial, cálculo diferencial) que a Astronomia aplicou entre outros, aos seguintes casos:

- Modelo Heliocêntrico
- Orbitas planetárias
- Distâncias no sistema Solar
- Distância às estrelas
- Posicionamento dos astros através de coordenadas (o que facilitou a navegação através da orientação astronômica) (MORAIS, 2003, p. 8).

Do ponto de vista educacional observa-se ainda que os estudos de conteúdos relacionados à astronomia conseguem relacionar diversos assuntos além dos matemáticos, tais como Física, Geografia, História, Artes, Literatura, entre outras possibilidades. Devido à importância do assunto temos sua citação em documentos

oficiais comona BNCC (BRASIL, 2018, p. 328) que apresenta com relação ao currículo de ciências três unidades temáticas, entre elas “Terra e Universo” que visa “[...] a compreensão de características da Terra, do Sol, da Lua e de outros corpos celestes – suas dimensões, composição, localizações, movimentos e forças que atuam entre eles”.

Contudo, discussões sobre esses temas são ainda escassas na formação inicial, como aponta Langhi e Nardi (2014, p. 56):

Nem mesmo o professor brasileiro do ensino fundamental e médio, na maioria dos casos, aprende conteúdos de Astronomia durante a sua formação inicial. Como consequência, os professores, em geral, optam por duas alternativas: preferem não ensinar Astronomia ou buscam outras fontes de informações. Porém, há carência de fontes seguras sobre astronomia, pois até mesmo livros didáticos continuam apresentando erros conceituais. A mídia é escassa em documentários sobre este tema, e muitas vezes prefere exagerar no sensacionalismo em notícias que envolvem assuntos sobre o cosmo.

Acrescentando ao aspecto anterior, existem outros limitantes para esse ensino: as aulas geralmente ocorrem durante o dia e boa parte das cidades do país não possuem locais propícios com instrumentos observacionais e até mesmo, a observação a olho nu no período noturno se torna difícil por conta da alta iluminação das cidades:

Não temos uma quantidade suficiente de planetários, observatórios, museus de ciências e associações de astrônomos amadores que poderiam servir de eficiente apoio ao ensino de Astronomia nas escolas. Deste modo, ocorre uma constante perda de valorização cultural e falta do hábito de olhar para o céu, reforçado pelo estilo de vida cada vez mais urbano e pelo excesso de iluminação pública mal direcionada, causando a poluição luminosa, que ofusca a maior parte das estrelas no céu, além de trazer desperdício de energia elétrica e consequências ao meio ambiente (LANGHI; NARDI, 2014, p. 56).

Todavia, ainda que existam dificuldades é necessário resgatar a curiosidade tanto de professores quanto de alunos, para que, de fato, ocorram discussões sobre a astronomia e outras disciplinas que podemos relacionar a ela, como a Matemática. Nesta última, podemos explorar a Geometria Esférica. Esse conteúdo aparece na astronomia partindo da necessidade de um sistema de localização dos astros e podemos verificar seu uso na história das civilizações ao adotar um modelo de esfera com centro na Terra e raio infinito em que qualquer objeto celeste em um dado instante está situado em um ponto sobre essa esfera.

Uma observação importante é que de acordo com a BNCC, nas unidades de conhecimento discutidas para o Ensino Fundamental (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística) temos como objeto de conhecimento elementos tais como ângulos, conceitos de localização e movimentação, procedimentos

de cálculos, relação de igualdade etc., que foram explorados durante a construção do Quadrante, assim como nas discussões e formalizações dos assuntos abordados. Para o Ensino Médio encontramos no documento em questão a recomendação para uma construção de uma visão integrada da Matemática, em que a realidade seja uma referência, levando em conta a vivência dos alunos envolvidos, marcada pelas suas condições socioeconômicas, avanços tecnológicos, bem como as potencialidades das mídias sociais e exigências do mercado de trabalho, por exemplo, tal qual foram consideradas durante nossa interação com os participantes da oficina.

Em complementaridade à BNCC, temos o Referencial Curricular do Paraná: Princípios, Direitos e Orientações. Na seção dedicada à Matemática para o Ensino Fundamental, podemos ler direitos específicos da disciplina, tais como reconhecer a Matemática como ciência humana, resultado de necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos (PARANÁ, 2018). Esse ponto foi considerado na oficina, uma vez que buscamos realizar conexões do conteúdo com a história da astronomia.

Com as questões levantadas e mediante as orientações dos documentos referidos, neste trabalho buscamos investigar as concepções de conteúdos básicos de estudantes do Ensino Fundamental e Médio, participantes de um projeto de extensão intitulado Teoria e Investigação em Matemática Elementar – TIME, ofertado pelo Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá. Tais concepções versam sobre a temática geometria não euclidiana (esférica) e astronomia, sendo depois exploradas sob o potencial pedagógico de uma oficina de astronomia teórico-prática, ofertada durante a implementação do projeto de extensão citado.

Durante a oficina buscamos estabelecer a participação dos estudantes, isto é, objetivamos executar uma estratégia de aprendizagem ativa. Segundo Frost (1991, p. 5), “[...] propõe-se que as estratégias que promovam o aprendizado ativo sejam definidas como atividades instrucionais que envolvam os alunos fazendo as coisas e pensando no que estão fazendo”. Assim, nosso objetivo durante a oficina foi, não apenas construir o instrumento, mas apresentar o sistema de coordenadas horizontais que envolve as noções da geometria esférica e desse modo incentivar que os estudantes pensassem sobre a justificativa geométrica do seu funcionamento e, conseqüentemente, estabelecessem relações sobre o seu formato e como usá-lo.

Ainda que abordamos uma geometria não euclidiana, trabalhamos na oficina com elementos discutidos na BNCC. Ademais, é importante ressaltar que usamos

recursos tecnológicos disponíveis (GeoGebra e *Astronomy Simulations and Animations*) tendo em vista que os alunos pudessem compreender os conceitos em foco de uma forma dinâmica e atrativa.

De modo geral, para a elaboração do presente texto, optamos por apresentar as nomenclaturas e notações da geometria esférica necessárias para relacionar os dois conhecimentos: Matemática e Astronomia. Além disso, explicitaremos a metodologia empregada e os resultados obtidos por intermédio de análise de um questionário. Em seguida apresentaremos nosso relato da abordagem e atitudes dos alunos durante a oficina, finalizando na sequência com as considerações finais.

2 A Geometria Esférica e o Sistema de Coordenadas Horizontais

Os estudiosos das civilizações antigas especulavam sobre o formato da Terra e não tinham instrumentos sofisticados como os nossos. Apesar de hoje sabermos que ela não é uma esfera perfeita: “[...] muito aproximadamente um esferoide oblato, mais precisamente um elipsoide de rotação cujo semieixo (ou raio) polar difere muito pouco do semieixo equatorial” (SILVEIRA, 2017, p. 06), adotaremos o modelo esférico para a compreensão de vários conceitos. Nesse sentido a Geometria Esférica desenvolvida por Riemann (1826-1866) é o ambiente ideal para fazer o estudo do sistema de coordenadas. Para mais detalhes sobre Geometria não euclidiana recomendamos a leitura das bibliografias Coxeter (1968), Greenberg (1994) e Heim (2017).

É importante ressaltar que nessa geometria temos o seguinte axioma:

Axioma: Não existem retas paralelas.

No trabalho apresentado por Riemann, as retas seriam circunferências máximas de uma superfície esférica S^2 , isto é, circunferências determinadas pela interseção de planos que passam pelo centro da esfera e a superfície esférica.

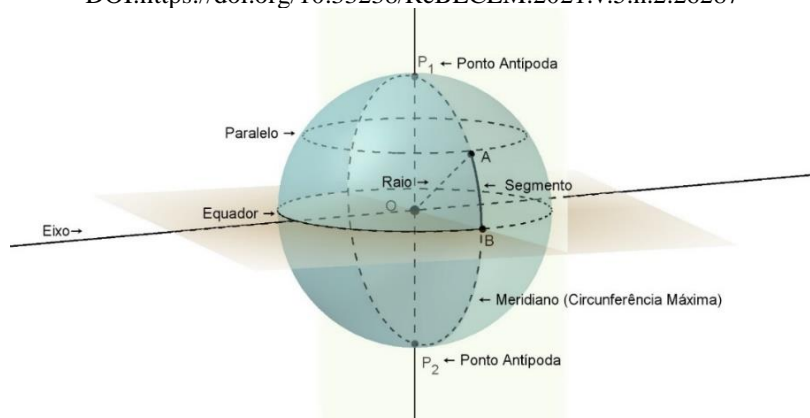


Figura 1: Principais elementos em Geometria Esférica.

Fonte: Os autores (2018).

A astronomia de posição, segundo Arana (2000):

Também conhecida como Astronomia Esférica ou Astronomia de Campo utiliza-se dos astros para o posicionamento e orientação na superfície da Terra, ou seja, utiliza-se de métodos e técnicas para obter as coordenadas astronômicas de um ponto (ARANA, 2000, p. 8).

Um conceito básico para o estudo dos sistemas de coordenadas astronômicas é o conceito de esfera com centro no observador e raio infinito (esfera celeste). Como seu raio é infinito, qualquer observador localizado na superfície da terra pode se considerar igualmente situado em seu centro. Podemos assim obter que qualquer astro, em um dado instante está situado em um ponto nessa esfera celeste.

Existem vários tipos de coordenadas astronômicas e uma delas que depende da localização do observador é o **sistema de coordenadas horizontais**. Nesse sistema, vamos considerar o observador no centro de uma esfera com seu respectivo plano (horizontal) que determina na superfície esférica uma circunferência máxima (**horizonte do observador**). Em tal plano temos os pontos cardeais **norte/north (N), sul/south (S), leste/east (E) e oeste/west (W)**. Se, a partir do observador, construirmos uma reta perpendicular ao seu plano teremos a determinação de dois pontos antípodos sobre a superfície esférica: o **Zênite**, ponto acima da cabeça do observador e, abaixo, diametralmente oposto, o **Nadir**. O **plano meridiano** é determinado pelo **Zênite** e os pontos cardeais **N** e **S**, já o plano chamado **vertical do astro** é plano que contém o observador, o Zênite e o astro que estamos observando.

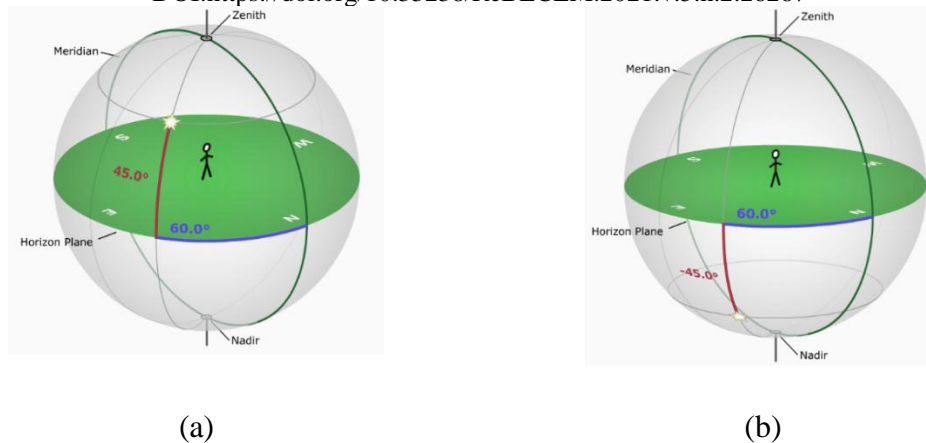


Figura 2:Coordenadas Horizontais.

Fonte: Astronomy Simulations and Animations (University of Nebraska–Lincoln, 2018).

No sistema de coordenadas horizontais, temos que a abscissa esférica é o **azimute** A , definido como o ângulo contado a partir do plano meridiano até o vertical do astro, que varia de 0° a 360° . A ordenada esférica é a **altura** h , ângulo entre o plano horizontal do observador e o segmento que liga o observador ao astro. A altura varia de 0° (astro no horizonte) a $\pm 90^\circ$ (astro no zênite ou nadir). Na Figura 2-(a) temos que $A = 60^\circ$ e $h = 45^\circ$, já em (b) temos que a estrela está abaixo do plano do observador, onde $A = 60^\circ$ e $h = -45^\circ$. O sistema de coordenadas ilustrado na imagem faz parte de uma simulação (*University of Nebraska–Lincoln*) que foi usada na oficina. Nela podemos movimentar o astro em questão e representar diversas situações de pontos na superfície esférica. Conhecendo esse sistema podemos entender o funcionamento do **Quadrante**, instrumento este construído pelos estudantes durante a oficina e usado para determinar a **altura** h do sistema horizontal. Essa explicação será apresentada adiante.

3 Metodologia

Este trabalho objetivou, inicialmente, investigar concepções de conteúdos básicos dos alunos do Ensino Fundamental e Médio sobre o conhecimento de alguma geometria não-euclidiana e conhecimentos sobre astronomia. Por seu caráter descritivo e com o desejo de compreender concepções prévias dos alunos a pesquisa seguiu uma abordagem qualitativa. Segundo Godoy (1995), as pesquisas qualitativas são descritivas, o pesquisador se preocupa com o processo e não simplesmente com os produtos ou resultados. Além disso, o investigador está interessado:

[...] em verificar como determinado fenômeno se manifesta nas atividades, procedimentos e interações diárias. Não é possível compreender o comportamento humano sem a compreensão do quadro referencial (estrutura) dentro do qual os indivíduos interpretam seus pensamentos, sentimentos e ações (GODOY, 1995, p. 63).

Nesse contexto, seguindo Godoy (1995), também estamos interessados em estudar a perspectiva dos participantes. Durante a oficina observamos o comportamento e participação dos alunos buscando ainda promover discussões e reflexões de forma a construírem seu conhecimento aplicando conceitos da matemática à astronomia na prática.

Com essas reflexões, num encontro de duração de 4 horas nossa estratégia foi, de forma geral, fazer uma investigação por meio de um questionário, uma apresentação da fundamentação teórica deste trabalho e uma oficina pautada em uma aprendizagem ativa que possibilitou aos estudantes a construção e a exploração de um instrumento de medição chamado **Quadrante**.

O questionário foi impresso, aplicado individualmente e teve suas respostas na forma de produção escrita. Conforme o quadro a seguir, as questões foram:

1. Baseado em seu conhecimento matemático, dada uma reta r qualquer e um ponto P fora dela, quantas retas paralelas a r que contém o ponto P existem? Por quê?
2. Você já ouviu falar em esfera celeste? O que a define?
3. Você já ouviu falar no instrumento “Quadrante”? Se sim, para que ele serve?
4. Você já estudou sobre alguma relação entre a Astronomia e a Matemática? Se sim, saberia descrever?

Quadro 1: Questionário.

Fonte: Os autores (2018).

Este questionário foi aplicado no início da oficina e com ele buscamos identificar os conhecimentos dos alunos participantes a respeito de alguns conceitos de matemática e astronomia, como o de geometria não euclidiana (geometria esférica) quando pensamos em aplicações astronômicas.

Os alunos escolhidos para participar dessa pesquisa foram 30 estudantes do Ensino Fundamental e Médio que faziam parte de um projeto de extensão da Universidade Estadual de Maringá, denominado TIME – Teoria e Investigação em Matemática Elementar. Tal projeto é coordenado por professores do Departamento de Matemática da referida Universidade e conta com o apoio de alunos de graduação em Matemática. Seus encontros são semanais e têm como objetivo o estudo de tópicos e problemas matemáticos por meio de oficinas e investigação matemática, em que os estudantes se tornam o centro do processo de aprendizagem e constroem seus

conhecimentos de forma participativa e autônoma, esse é um ponto importante, pois estamos estudando um grupo diferenciado de alunos.

Dentro do projeto TIME a oficina que planejamos ocorreu no ano de 2018, em uma manhã de sábado, com duração de 4 horas.

Para a análise das questões, identificamos com as notações F6, F7, F8 e F9 os alunos do Ensino Fundamental do 6º ao 9º ano, respectivamente, e como M1, M2 e M3 os alunos do Ensino Médio do 1º ao 3º ano, respectivamente.

Com a identificação definida anteriormente apresentamos no Quadro 2 o número de alunos de cada série:

Nível de ensino	Nº de alunos
F6	4
F7	1
F8	6
F9	3
M1	4
M2	9
M3	2
Não identificou	1

Quadro 2: Quantidade de alunos em cada nível de ensino.

Fonte: Os autores (2018).

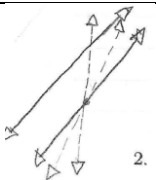
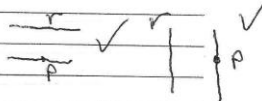
A seguir, faremos a análise de cada uma das questões no que diz respeito ao conhecimento desses alunos sobre as geometrias não euclidianas e conhecimentos astronômicos.

4 Concepções prévias dos discentes: análise do questionário

Questão 1) Baseado em seu conhecimento matemático, dada uma reta r qualquer e um ponto P fora dela, quantas retas paralelas a r que contém o ponto P existem? Por quê?

Essa questão foi proposta com o intuito de identificar se os alunos conheciam uma geometria diferente da euclidiana por meio do conceito de reta paralela e investigar como eles concebem o conceito de reta paralela a uma reta dada passando por um ponto P fora dela.

Tivemos 21 alunos, sendo 8 alunos do grupo do Fundamental e 13 do Médio, que responderam que existe somente “uma reta” paralela à reta r dada, passando por P , e alguns alunos argumentaram justificando suas respostas:

Aluno/Nível	Resposta
A9/F8	 <p>1, porque não importa onde você coloque o ponto P, apenas uma reta não paralela por cima da outra.</p> <p>2.</p>
A27/M2	<p>1 reta para pois só há uma possibilidade de reta paralela</p>
A28/M2	<p>Apenas 1 reta paralela, se inclinar o mínimo, de eventualmente não se cruzar \therefore não serão paralelas</p> 

Quadro 3: Respostas da questão 1.

Fonte: Os autores (2018).

Observe que os alunos não cogitaram a possibilidade da não existência de uma reta paralela ou a possibilidade de infinitas retas paralelas, ficando restritos somente à geometria euclidiana.

Um aluno respondeu que não entendeu e este aluno era do grupo M1. Os demais deixaram em branco ou responderam “não sei”.

A seguinte resposta chamou atenção:

depende das circunstâncias.

Figura 3: Registro da resposta do aluno sem identificação.

Fonte: Os autores (2018).

Essa resposta nos deixou na dúvida se o aluno considerou a possibilidade de geometrias diferentes da euclidiana ou se as “circunstâncias” que respondeu foi no próprio plano euclidiano. Infelizmente, o aluno não argumentou mais e não identificou a série em que estudava. Todavia, percebemos que 14 alunos tentaram argumentar sobre o que é uma reta paralela escrevendo, por exemplo, que cada ponto de uma reta possui a mesma distância da reta dada ou que qualquer outra reta com uma inclinação diferente intercepta a reta dada, mas nenhuma resposta considerou, de fato, a possibilidade de termos uma geometria em que não se admite retas paralelas. E mesmo sabendo que o assunto que seria tratado na oficina era Astronomia e que a Terra tem formato aproximadamente esférico, ninguém considerou a geometria esférica, isto é, nenhum aluno do grupo F6 até o grupo M3 (último ano do Ensino Médio) respondeu à questão utilizando argumentos da geometria não euclidiana.

Questão 2) Você já ouviu falar em esfera celeste? O que a define?

O objetivo geral dessa questão era o de verificar se os alunos participantes sabiam o conceito de “esfera celeste” ou ainda se eles tinham ao menos uma noção intuitiva sobre o termo. Nossa suspeita era de que esses alunos não saberiam responder, pois como apontam Langhi e Nardi (2012):

Um professor de Ciências no Ensino Fundamental, por exemplo, ver-se-á confrontado com o momento de trabalhar com conteúdos de Astronomia. No entanto, o docente dos anos iniciais do Ensino Fundamental geralmente é graduado em Pedagogia, e o dos anos finais geralmente em ciências biológicas, e conceitos fundamentais em Astronomia não costumam contemplar estes cursos de formação, levando muitos professores a simplesmente desconsiderar conteúdos deste tema em seu trabalho docente (LANGHI; NARDI, 2012, p. 93).

Pudemos confirmar nossa expectativa ao verificar que 24 alunos responderam “não” a essa questão sem apresentar argumentos, 4 alunos deixaram em branco; somente 1 aluno, do grupo F6, respondeu “não”, mas escreveu que a definiria como “um corpo celeste”. Nesse caso, entendemos que ele acreditava que essa esfera era um objeto físico do espaço sideral, o que está incorreto, pois a esfera celeste é um conceito abstrato.

Uma resposta que apresentou uma noção intuitiva sobre o termo foi:

Aluno/Nível	Resposta
A19/M1	<i>Não, nunca ouvi falar porém acredito que seja um método de posicionamento baseado nos astros.</i>

Quadro 4: Resposta da questão 2 do A19.

Fonte: Os autores (2018).

Ao responder “método de posicionamento” podemos verificar que apesar de não ter ouvido falar sobre a definição de esfera celeste o aluno conseguiu expressar uma boa ideia sobre o termo que de fato relaciona a posição dos astros em uma esfera.

Com essa questão constatamos a ausência do conhecimento sobre astronomia de posição e seus termos. Alguns pesquisadores como Leite e Hosoume (2005), Langhi e Nardi (2007), Batista et al. (2018) têm buscado entender o contexto do ensino de astronomia. Não vamos nos aprofundar em todos os nuances em torno dessa temática, mas vejamos que segundo Batista et al. (2018, p. 47-48):

A realidade da formação de professores, carente de reflexão sobre a ciência e sobre o seu ensino, provoca uma grande insegurança nesses professores quanto ao desenvolvimento do conhecimento científico em sala de aula; e resulta em um trabalho pouco ou nada inovador, limitando-se na maioria das vezes em cumprir burocraticamente o livro didático que, por melhor que seja

Nesse contexto torna-se compreensível as respostas encontradas junto aos alunos do Ensino Fundamental e Médio.

Questão 3) Você já ouviu falar no instrumento “Quadrante”? Se sim, para que ele serve?

Como um dos objetivos da oficina era a construção do instrumento “Quadrante” ficamos curiosos em investigar se os alunos já o conheciam. Algumas respostas não foram totalmente erradas, pois 6 alunos escreveram que acreditavam ser algo relacionado com os quadrantes do círculo trigonométrico ou 1/4 do plano euclidiano. Um aluno respondeu que o instrumento estava relacionado com localização:

Aluno/Nível	Resposta
A18/M1	<i>acho que um instrumento usado para a localização fora do planeta.</i>

Quadro 5: Resposta da questão 3 do A18.

Fonte: Os autores (2018).

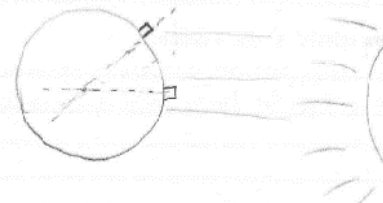
Além desses alunos, tivemos 2 que deram outras respostas, 15 responderam “não” e 6 que deixaram em branco.

Desse modo, a oficina de construção deste instrumento mostrou-se produtiva já que os alunos não o conheciam, não sabiam de sua aplicação e muito menos imaginavam a matemática envolvida na sua construção e utilização. Com a oficina pudemos propor por meio da atividade experimental um trabalho envolvendo ciências/astronomia e matemática, tal oficina gerou um momento importante de descontração, trabalho em grupo e, principalmente, motivação dos alunos para o estudo dos temas abordados, entendemos que esta última é muito importante, pois para um aluno aprender, precisa estar motivado acima de tudo, nesse sentido a oficina atingiu seu objetivo.

Questão 4) Você já estudou sobre alguma relação entre a Astronomia e a Matemática? Se sim, saberia descrever?

Gostaríamos, com essa questão, de verificar se os alunos tinham conhecimento da relação entre a astronomia e a matemática e se sim, que expressassem suas ideias. Caso os alunos não conhecessem sobre o assunto, investigaríamos se eles imaginavam alguma aplicação da matemática na astronomia.

Apresentamos a seguir as noções descritas por alguns alunos:

Aluno/Nível	Resposta
A11/F8	Não, nunca estudei a respeito dessa relação, mas acho que predomina da matemática na Astronomia para calcular a posição dos astros.
A18/M1	Sim, a matemática é usada na astronomia para medir os corpos celestes e sua distância em relação a Terra.
A19/M1	<p>Sim, já estudei a respeito da relação existente entre astronomia e matemática. Entendi como se calcula os fusos horários, como as estrelas servem de orientação e como Euclides, se não me engano, provou a esfericidade da Terra, sendo que, num mesmo horário, duas cidades distintas (acredito que uma seja Alemanha) um pégo projetava sombra e outro não e que indica a inclinação dos raios solares, que formavam um ângulo o qual permitia identificar o raio da Terra.</p> 
A30/M3	Nunca estudei, mas acho que são muito relacionadas nas partes das com torções, nas distâncias dos astros, entre outros coisas.

Quadro 6: Respostas da questão 4.
Fonte: Os autores (2018).

Do total de 30 alunos, 16 responderam que não estudaram nenhuma relação entre a astronomia e a matemática. Nesse grupo, porém, os alunos A11 e A30 argumentaram que acreditavam estar relacionadas (ver quadro 6). Além desses, 2 alunos não responderam “sim” ou “não”, mas descreveram que a astronomia e a matemática envolvem cálculos que estão relacionadas ao universo. Do grupo que disseram “sim” tivemos 7 alunos. Essas respostas vieram justificadas com argumentos que apresentamos no quadro 6, no qual os alunos descreveram existir relações de distâncias entre astros, ou terra e astros e muitas vezes nas relações de orientação. Gostaríamos de destacar a resposta da aluna A19 que indicou um conhecimento histórico sobre o cálculo do raio da Terra, além da orientação com estrelas, assunto trabalhado posteriormente na oficina, evidenciando assim como um contexto histórico pode auxiliar na compreensão de um conhecimento. O restante (5 alunos) deixaram a questão em branco.

Por fim, no que diz respeito a essa questão, podemos concluir que a maioria respondeu não ter estudado relação alguma sobre a astronomia e a matemática, fato esse que já esperávamos.

5 A proposta de construção do Quadrante: um relato sobre a realização da oficina

Como já esperávamos, os estudantes apresentaram pouco conhecimento no que diz respeito às questões propostas que se referiam a conceitos da geometria não euclidiana e suas aplicações na astronomia, bem como o instrumento que escolhemos para exploração na oficina.

De modo geral e pensando em promover uma mudança nesse cenário, objetivamos durante a oficina mediar a aprendizagem dos assuntos em questão instigando os participantes a utilizarem noções de matemática para sua construção e extraírem conclusões aplicando conceitos da geometria não euclidiana na astronomia.

A oficina seguiu apresentando aos estudantes um pouco sobre a fundamentação teórica, descrita neste trabalho, para que eles pudessem compreender o contexto em que a oficina se encontrava.

Em seguida, realizamos a construção do Quadrante⁵, objetivando relacionar a matemática à astronomia proporcionando conhecimentos teóricos por meio da prática experiencial. Nessa perspectiva, a ênfase de nossa proposta foi no papel do aluno, seu envolvimento e participação reflexiva, de onde escrevem Bacich e Moran (2018, p. 2):

A aprendizagem mais profunda requer espaços de prática frequentes (aprender fazendo) e de ambientes ricos em oportunidades. Por isso, é importante o estímulo multissensorial e a valorização dos conhecimentos prévios dos estudantes para “ancorar” os novos conhecimentos.

Pensando nisso, apontamos questões iniciais e investigamos agora pela fala dos estudantes, que conhecimentos eles tinham sobre o quadrante. Esse instrumento, não é amplamente conhecido, mas em seu uso pela história fora de grande importância e construído em vários tamanhos, alguns eram enormes de modo a aumentar a precisão de medida.

Na Figura 4, podemos ver a representação de um quadrante do emitente nobre e observador astronômico Tycho Brahe (1546-1601). Este reunia muitos dados sobre as

⁵ Um modelo do instrumento pode ser encontrado neste link: <https://bit.ly/306UPVs>.

posições dos astros. Um de seus objetivos era o de construir uma astronomia mais precisa do que havia até então. Na sua residência havia uma imagem que decorava com elegância seu quadrante mural. Tal instrumento consistia em um arco de latão de $6\frac{3}{4}$ pés de raio, 5 polegadas de largura e 2 polegadas de espessura⁶. Tycho foi representado na imagem apontando para a abertura de uma parede, aos seus pés podemos ver um cachorro deitado. Com grandes recursos, ele reunia assistentes que o auxiliava. Na representação podemos ver um olhando através da mira de observação, outro verificando o horário e um terceiro anotando os dados. A imagem tem como data o ano de 1587, mas o quadrante estava em uso desde junho de 1582 (DREYER, 1990).

Uma questão interessante, mas que não foi explorada na oficina, é a problemática de subdivisão de arcos. Um dos estudiosos que se dedicou a resolvê-la foi Pedro Nunes (1502-1578) que publicou uma engenhosa proposta em *De Crepusculis* (1542) (DREYER, 1990). Contudo, tal discussão foge do escopo do artigo e devido à complexidade e tempo nosso modelo de quadrante usado na oficina já apresentava as marcações de ângulos.

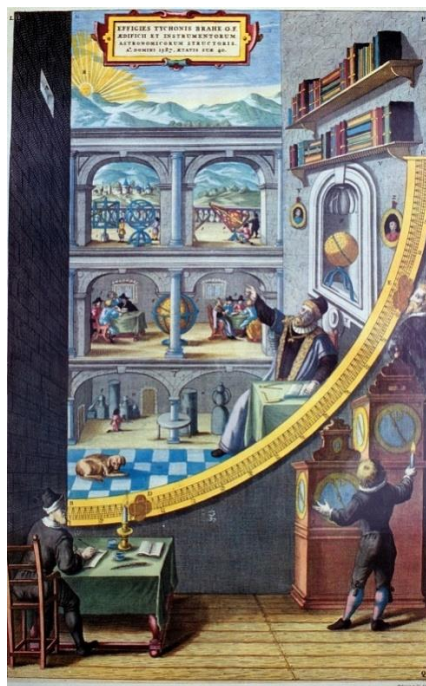


Figura 4: Quadrante Mural ou Quadrante Thyconiano.
Fonte: Imagem colorida por Jan Blaeu (1596-1673).⁷

⁶ 1 pé equivale à 30,48cm e 1 polegada, 2,54cm.

⁷ Imagem disponível em: <http://lilith.fisica.ufmg.br/~dsoares/astro/tycho-mural-e.htm>. Acesso em 01 de maio de 2021

Os quadrantes que são usados em astronomia podem apresentar outros recursos, como escalas com as tangentes de certos ângulos. Foi um dos instrumentos astronômicos usado nas navegações, sendo que um dos objetivos era o de obter a altura da Estrela Polar e, desse modo, determinar a latitude do local.

O funcionamento do quadrante é simples, pois ele é formado por um quarto de um círculo graduado no qual colocamos um fio de prumo. A função primária desse instrumento é a medição da altura dos astros do sistema horizontal de coordenadas.

Para melhor entendermos, vejamos que na Figura 5 temos a representação de um quadrante que foi apontado para o astro A. O segmento PD é o fio de prumo. Como podemos ver, o quadrante indica que o ângulo β é a altura do astro A em relação ao horizonte \overline{BP} . Vejamos a justificativa geométrica do seu funcionamento:

Primeiramente, observe que sendo o quadrante $1/4$ do círculo, temos que ao apontarmos para o astro encontramos que $A\hat{P}C = 90^\circ$. Do sistema horizontal de coordenadas a altura do astro é α e como $A\hat{P}C = A\hat{P}B + B\hat{P}C = 90^\circ$ obtemos que:

$$\alpha + \phi = 90^\circ(1)$$

Além disso, temos que o fio de prumo determina com o horizonte um ângulo de 90° de onde segue $B\hat{P}D = B\hat{P}C + C\hat{P}D = 90^\circ$, isto é:

$$\phi + \beta = 90^\circ(2)$$

De (1) e (2) segue que $\alpha = \beta$.

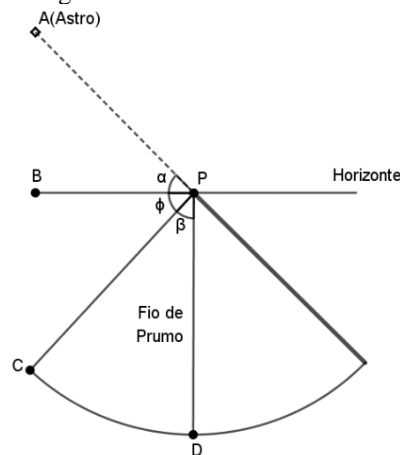


Figura 5: Representação geométrica do uso do quadrante para a medição da altura dos astros.

Fonte: Os autores (2018).

No momento da oficina e antes da construção do Quadrante, foi discutida com os estudantes a parte teórica matemática que justifica o bom funcionamento deste instrumento, bem como o modo de sua aplicação. Essa discussão ocorreu de maneira bem dinâmica incluindo a participação dos estudantes, pois foi direcionada por meio de perguntas de modo que os estudantes respondiam e iam ao quadro fazer explicações. As perguntas obedeciam a uma sequência lógica sem muita demora e observamos muita curiosidade sobre o assunto por parte dos estudantes. Tal observação deveu-se a forma como eles participaram e discutiam os assuntos realizando perguntas e respondendo-as por meio de desenhos no quadro branco.

Sobre a construção, ressaltamos que todos receberam o modelo e o construiu com o auxílio dos professores ministrantes e dos graduandos em matemática participantes do projeto. Além disso, vários estudantes ajudavam uns aos outros, tanto com o manipular dos materiais, quanto em outras discussões sobre o tema de maneira autônoma e colaborativa. Tal interação foi facilitada pela organização da sala do projeto que dispõe de mesas para grupos, isto é, não é a forma tradicional de organização em fileiras. Esse fator permitiu que os alunos ficassem mais próximos e propiciou dinamicidade nas atividades propostas. Além disso, ao observar a ansiedade e o entusiasmo dos alunos participantes, observamos o quanto aquele momento estava sendo produtivo e construtivo.



Figura 6: Alunos construindo o Quadrante.
Fonte: Os autores (2018).

Após a construção, fomos com os estudantes até o estacionamento do Departamento de Matemática, onde solicitamos que estes utilizassem o Quadrante construído por eles para medir a altura do Sol naquele horário. Para isso, cada estudante precisou segurar o Quadrante de modo que a sombra do canudo formasse um anel na parede próxima a eles. Nesse caso, os estudantes deveriam deixar o fio de prumo esticado de modo que a inclinação do instrumento indicasse o ângulo correspondente à altura do Sol, o objeto em questão, conforme a Figura 7:

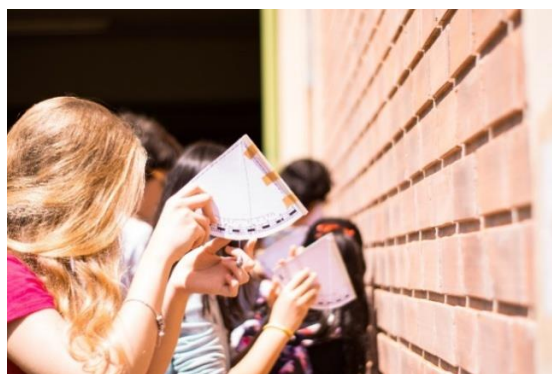


Figura 7: Posição do Quadrante para a medição da altura do Sol.
Fonte: Os autores (2018).

Alguns alunos tiveram dificuldades de posicionar o instrumento corretamente de forma a obter a marcação do ângulo correta. Entretanto, os professores e os alunos que conseguiram facilmente foram auxiliando e explicando mais uma vez o funcionamento do instrumento aos que apresentavam dificuldades. Quando obtinham a medida correta do ângulo que representa a altura angular do sol naquele momento, eles ficavam entusiasmados com seu uso e seus resultados alcançados.

Tal ação corrobora com a afirmação de Eison (2010), que escreve sobre o potencial de oferecer aos alunos uma aula fora da sala tradicional e ainda que simples,

como fizemos no campus da Universidade, podem proporcionar uma marcante experiência, em suas palavras “[...] uma curta e simples excursão a pé pelo campus pode oferecer inúmeras oportunidades educacionais para ilustrar conceitos anteriormente apresentados apenas por meio de leituras de livros didáticos e/ou apresentações em sala de aula” (EISON, 2010, p. 15). De fato, ainda que a oficina tenha sido dinâmica, durante esse momento eles expuseram ainda mais questões sobre distâncias entre astros e relações com o horário e altura do Sol. Vários alunos também apresentaram entusiasmo, dizendo que levariam o instrumento ao sítio para observar e medir a altura dos astros durante a noite.

Com esta implementação da proposta de construção do Quadrante proporcionamos situações para que alunos pensassem sobre conceitos astronômicos e propriedades matemáticas, já que durante a sua construção e uso houve uma tomada de consciência por parte dos estudantes dos conceitos trabalhados de modo que os estudantes investigavam, realizando medições, e refletiam para extrair suas conclusões.

6 Considerações finais

Nesta pesquisa, tivemos como objetivo, além de investigar concepções prévias dos estudantes sobre a geometria não euclidiana aplicada à astronomia, proporcionar discussões e reflexões em grupo que direcionassem os alunos a construir seu próprio conhecimento aplicando conceitos da matemática à astronomia, na prática. A intenção por este estudo decorre da escrita de uma dissertação de mestrado profissional na área da matemática, na qual foram abordados conceitos da matemática relacionados à astronomia (MENEZES, 2018). A partir dessa dissertação, nos sentimos impelidos a realizar leituras que apresentavam as dificuldades do ensino da astronomia na Educação Básica, bem como a falta do ensino dessa ciência. Para este texto, fizemos uma aplicação de um questionário para a investigação do conhecimento dos alunos participantes da oficina sobre a relação entre astronomia e matemática, de modo que escolhemos ideias base da astronomia para comprovar a nossa hipótese – os alunos do grupo que escolhemos para realizar nossa investigação não tinham conhecimentos básicos de geometria não euclidiana aplicada à astronomia. Logo após, realizamos a construção de um instrumento astronômico, o qual precisou de ferramentas matemáticas

e pode ser explorado quando aliado a conhecimentos da geometria esférica aplicada à astronomia.

No que se refere ao Quadrante, já era esperado que, pelo menos a maioria dos alunos, não conheceria tal instrumento, fato este que foi comprovado na totalidade dos alunos. Com relação à sua construção, observamos que esta foi um tanto demorada devido à falta de habilidade dos alunos em manusear os instrumentos de construção. Também notamos dificuldade no uso do quadrante: os alunos se confundiam no momento de extrair as medidas de inclinação projetada no transferidor, no entanto puderam aprender a utilizar esse instrumento. Esse fato foi observado no momento da prática para coleta dos dados que permitiriam que esses alunos calculassem a medida da altura do Sol.

Do realizar da pesquisa, percebemos que os instrumentos vêm sendo pouco explorados durante as aulas de matemática. No entanto, foi possível observarmos que a oficina proporcionou um momento importante para o processo de ensino e aprendizagem visto que os alunos estavam completamente envolvidos com a atividade proposta, apresentando-se ativos do começo ao fim da oficina.

Outro aspecto nesta pesquisa que consideramos relevante foi a possibilidade de explorar e discutir conceitos matemáticos não euclidianos de maneira aplicada. Além disso, trouxemos aos alunos participantes o conhecimento e a utilização de um instrumento histórico da astronomia pouco reconhecido e explorado, principalmente em sala de aula. É claro que o quadrante não é o único instrumento possível de ser abordado, existem outros, tais como o instrumento de sombras, o sextante ou oitante (octante). Todavia, o nosso intuito foi o de ilustrar uma possibilidade e promover discussões sobre uma aplicação da matemática à astronomia. O nosso encontro foi de uma manhã, cerca de 4 horas/aula, mas nada impede que outros estudos mais aprofundados e diversificados possam ser realizados em períodos maiores.

Com as reflexões realizadas com esta pesquisa, percebemos ainda o quão importante é a busca de contextos diferentes para o ensino e a aprendizagem da matemática, haja vista que esta pode ser aplicada de modo que os alunos tenham conhecimento da ciência e até mesmo da sua história, contribuindo com o desenvolvimento intelectual e cultural de cada aluno.

Desse modo, consideramos que o trabalho com a astronomia possibilitou aos alunos construir conhecimentos sobre geometria não euclidiana (esférica) e vivenciar uma experiência diferenciada durante as aulas de matemática. Ademais, defendemos

que a inclusão de tópicos da astronomia proporciona em sala de aula uma efetiva exploração matemática e cognitiva dos conceitos possíveis de serem abordados.

Referências

ARANA, J. M. **Astronomia de Posição: Notas de Aula**. Presidente Prudente, 2000. Disponível em: <<http://www2.fct.unesp.br/docentes/carto/arana/Astron.pdf>>. Último acesso em: 20 abr. 2017.

BACICH, L.; MORAN, J. **Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática**. [recurso eletrônico]. Porto Alegre: Penso, 2018.

COXETER, H. S. M. **Non-Euclidean Geometry**. 5a ed. Toronto: University of Toronto Press, 1968.

BATISTA M. C., FUSINATO P. A., OLIVEIRA A. A. Astronomia nos livros didáticos de ciências do ensino fundamental I, **Ensino & Pesquisa: Revista multidisciplinar de licenciatura e formação docente**, União da Vitória, v.16, n.03, jul/set 2018, p. 46-64.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Educação É a base**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

DREYER, J. L. E. **Tycho Brahe: A Picture of Scientific Life and Work in the Sixteen th Century**. [s.l.] A. & C. Black, 1890.

EISON, Jim. Using active learning instructional strategies to create excitement and enhance learning. **Jurnal Pendidikantentang Strategi Pembelajaran Aktif (Active Learning) Books**, Tampa, v. 2, n. 1, p. 1-20, 2010. Disponível em:<<https://bit.ly/3i1ttZI^>>. Acesso em: 26 jul. 2021.

FROST, S. H. **Academic advising for student success: A system of shared responsibility**. Washington, D.C: School of Education, George Washington Univ, 1991.

GODOY, A. S. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. **Revista de Administração de Empresas**, São Paulo, v. 35, n. 2, p. 57-63, abr. 1995.

GREENBERG, M. J. **Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History**. 3a ed. New York: W. H. Freeman and Company, 1994.

DOI:<https://doi.org/10.33238/ReBECCEM.2021.v.5.n.2.26287>

HEIM, L. **Geometria esférica**: proposta de atividades em conexão com a geografia. 2013. 65 f. Dissertação (Curso de Mestrado Profissional em Matemática), UFRPE, Recife, 2013.

Disponível

em:<<http://www.dm.ufrpe.br/sites/www.dm.ufrpe.br/files/tcclucianeversaofinal.pdf>>. Acesso em: 09 jul. 2017.

LANGHI, R.; NARDI, R. Ensino de astronomia: erros conceituais mais comuns presentes em livros didáticos de Ciências. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, Florianópolis, v. 24, n. 1: p. 87-111, abr. 2007.

LANGHI, R.; NARDI, R. **Educação em Astronomia**: Repensando a formação de professores. São Paulo: Escrituras Editora, 2012.

LANGHI, R.; NARDI, R. Justificativas para o ensino de Astronomia: o que dizem os pesquisadores brasileiros? **Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências**, Belo Horizonte, v.14, n.3, p. 41–59, 2014.

LEITE, C.; HOSOUME, Y. Astronomia nos livros didáticos de Ciências—um panorama atual. In: XVI SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE FÍSICA, 16, 2005, Rio de Janeiro, **atas**, Rio de Janeiro, p. 1- 10, 2005. Disponível

em:<<https://sec.sbfisica.org.br/eventos/snef/xvi/cd/resumos/T0225-1.pdf>>. Acesso em: 26 de julho de 2021.

MENEZES, L. P. G. **A orientação geográfica e a medição do tempo pela geometria da posição aparente dos astros**. 2018. 114 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Maringá, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Maringá, 2018.

MORAIS, Carlos Augusto Lopes. **A Astronomia no ensino da Matemática**: uma proposta para o ensino secundário. 2003. 223 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Ciências, Matemática Aplicada, Universidade do Porto, Porto, 2003. Disponível em: <<https://hdl.handle.net/10216/9666>>. Acesso em: 26 jul. 2021.

PARANÁ. **Referencial Curricular do Paraná**: princípios, direitos e orientações. Curitiba, SEED, 2018. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/bncc/2018/referencial_curricular_parana_cee.pdf>. Acesso em: 27 jul. 2021.

SILVEIRA, F. L. Sobre a forma da Terra. **Física na Escola**, [s.l.], v. 15, n. 2, p. 4-14, 2017.

UNIVERSITY OF NEBRASKA. **Coordenadas Horizontais**. s/d. Disponível em: <<https://nebraska.edu/>> Acesso em: 26 jul 2021.

DOI:<https://doi.org/10.33238/ReBECeM.2021.v.5.n.2.26287>

VIEIRA, T.; CONEGLIAN, D.; BATISTA, M. O projeto *Astronomy Day in Schools* da União Astronômica Internacional: uma possibilidade para o ensino e divulgação da Astronomia. **Revista Pontes**. Paranavai, v. 8, p. 143–164, set. 2020.

Recebido em: 12 de novembro de 2020

Aceito em: 17 de julho de 2021