

**EXPERIÊNCIA FORMATIVA COM MODELAGEM MATEMÁTICA NA
CAPITAL PARANAENSE DA LARANJA: “CORTA AQUI, ESPREME LÁ!”****TRAINING EXPERIENCE WITH MATHEMATICAL MODELING IN THE
ORANGE CAPITAL OF PARANA: “CUT HERE, SQUEEZE THERE!”**Bruna Carla Alves Falleiro¹Eliana Mayara Mendes Martelli²Daniela Barbieri Vidotti³Wellington Piveta Oliveira⁴

Resumo: Neste texto relatamos a primeira experiência vivida por duas acadêmicas da Licenciatura em Matemática, na condição de professoras, com Modelagem Matemática e refletimos sobre aspectos formativos decorrentes da prática. A atividade foi desenvolvida com acadêmicos do 4º ano do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, campus Paranavaí mediante a situação: Que quantidade de laranja seria necessária para preparar um copo de suco de laranja de 400 ml? impulsionando para: **Quanto de suco tem uma laranja?** Os estudantes foram convidados a investigar a situação e, ao utilizarem diversas relações matemáticas envolvendo a laranja e seu suco, responderam adequadamente a situação. A experiência ensejou algumas reflexões sobre a primeira experiência na condição de professoras atuando com Modelagem Matemática revelando, por exemplo, a aula simulada como ação formativa, bem como a tensão da reflexão sobre a própria prática quando se tem como objetivo a formação em Modelagem Matemática.

Palavras-chave: Ensino de Funções; Formação de Professores; Educação Matemática.

Abstract: In this text we report the first experience lived by two academics of the Degree in Mathematics, as teachers, with Mathematical Modeling and we reflect on formative aspects resulting from the practice. The activity was developed with students of the 4th year of the Degree in Mathematics at the State University of Paraná - UNESPAR, Paranavaí campus, through the situation: How much orange would be needed to prepare a 400 ml glass of orange juice? boosting to: **How much juice is in an orange?** The students were invited to investigate the situation and, when using several mathematical relationships involving the orange and its juice, they responded appropriately to the situation. The experience gave rise

¹ Licenciada em Matemática, Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR), campus Paranavaí. Secretaria Estadual de Educação do Estado do Paraná (SEED/PR), Paranavaí, Paraná, Brasil. E-mail: falleirobruna96@gmail.com.

² Licenciada em Matemática, Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR), campus Paranavaí. Centro Municipal de Educação Infantil Menino Davi, Paranavaí, Paraná, Brasil. E-mail: eliana_mayh@hotmail.com.

³ Doutora em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Estadual de Maringá (UEM). Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR), campus Paranavaí. Paranavaí, Paraná, Brasil. E-mail: dnbarbieri@hotmail.com.

⁴ Doutor em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Estadual de Maringá (UEM). Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR), campus Paranavaí. Paranavaí, Paraná, Brasil. E-mail: wellingtonmat09@hotmail.com.

to some reflections on the first experience as teachers working with Mathematical Modeling, revealing, for example, the simulated class as a formative action, as well as the tension of reflection on their own practice when training in Mathematical Modeling is the objective.

Keywords: Teaching Functions; Teacher training; Mathematics Education.

1 Considerações iniciais

Experienciar diferentes abordagens de ensino ainda no curso de graduação em Licenciatura em Matemática é uma condição para que a prática do futuro(a) professor(a) seja significativa para aqueles que com ele(a) aprende. Entre essas abordagens de ensino e aprendizagem temos a Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática.

A literatura brasileira em Modelagem Matemática tem nos mostrado que a Formação de Professores é um tema relativamente recente (KLÜBER, 2017, OLIVEIRA; KLÜBER, 2017), portanto, refletir sobre possibilidades para que essa formação seja promotora de inúmeras mudanças nos contextos escolares se mostra necessário. Algumas pesquisas têm problematizado a formação inicial (OLIVEIRA, 2020) e continuada (MUTTI, 2021) em Modelagem Matemática, sugerindo ser um outro modo de vivenciar esse movimento de “tornar-se” professor que ensina Matemática.

Klüber (2017) argumenta que como a Modelagem Matemática tem sido defendida, com frequência, para ser inserida nos currículos, há um contexto favorável para o debate sobre esse tema. Nessa linha, OLIVEIRA (2023) propõe que essa reflexão enseja a manifestação de uma **perspectiva formativa em Modelagem Matemática** e argumenta que este é um **terreno** emergente que merece atenção.

Terreno esse que potencializa uma temática de investigação com a qual se pode impulsionar ações formativas já que pesquisa e prática, no campo da Modelagem Matemática, sugerem não serem dissociáveis. [...] a necessária e urgente colocação desse debate fortalece não só a produção de conhecimento na área como também os impactos (in)diretos no contexto da Formação de Professores por aqueles que, driblam, receiam, admiram ou defendem a Modelagem Matemática enquanto um, entre vários, modos de problematizar e investigar matematicamente situações reais (OLIVEIRA, 2023, p. 13, destaque do autor).

Esses argumentos se articulam aos objetivos desse texto que é refletir sobre aspectos formativos em Modelagem Matemática ensejados por uma primeira experiência vivida por duas acadêmicas da Licenciatura em Matemática com Modelagem Matemática, na condição de professoras. A atividade que será descrita foi desenvolvida com acadêmicos do 4º ano do curso de graduação em Licenciatura em Matemática da

Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, campus de Paranavaí, na componente Estágio Curricular Supervisionado.

A escolha da atividade relacionada à Laranja foi motivada pelo fato de Paranavaí ser considerada a capital paranaense da laranja. A experiência ocorreu no âmbito da Universidade com os colegas da turma, constituindo em uma das ações de formação para o trabalho com a Modelagem Matemática, a aula simulada⁵.

Alertamos que uma primeira versão deste texto se encontra nos anais do XVI Encontro Paranaense de Educação Matemática (EPRM). Nesta, ampliamos a discussão relativa à Formação de Professores em Modelagem Matemática oportunizada pela experiência relatada.

Após essa breve contextualização, apresentaremos algumas compreensões sobre Modelagem Matemática, na sequência, uma descrição acerca da primeira experiência vivida com Modelagem Matemática e, por fim, algumas reflexões sobre a Formação de Professores em Modelagem Matemática a partir desta prática.

2 Modelagem Matemática: uma abordagem para o ensino e aprendizagem

No final da década de 1970, no Brasil, os alunos e professores passaram a protagonizar a história da Modelagem Matemática que, por sua vez, se expressa em um outro modo “fazer matemática”. Essa forma de “educar matematicamente” resgata outras maneiras de se trabalhar com matemática, pois, em geral, se utiliza de problemas com referência na realidade.

Esse é um ponto de destaque nessa abordagem. Nela não se trabalha com problemas fictícios e vai no caminho inverso de práticas reprodutivistas, ou seja, não se dá uma pergunta ao aluno para que ele utilize uma ferramenta e encontre a resposta correta; nela, o aluno é encorajado a perguntar a si e aos outros, tendo como objetivo solucionar uma situação e, nesse percurso, mobilizar e aprender ferramentas matemáticas que também ajudam a compreender o fenômeno escolhido. Dessa forma, os alunos irão

⁵ Empregamos o termo “aula simulada” conforme previsto no programa do Estágio Supervisionado como componente curricular. Entendemos que, na aula simulada, o estudante se coloca no papel de professor, doravante, **professor-estudante**, pois é ele quem propõe a atividade, realiza as mediações para a realização das tarefas, orienta, mobiliza e convida os demais participantes a desenvolverem a proposta de ensino e aprendizagem, na condição de estudantes. Logo, assumir este papel favorece o desenvolvimento de ações e reflexões que, de algum modo, contribuem para a formação dos estudantes (estudante-professor e estudantes). “Aula simulada”, faz alusão à uma intenção, pois ainda que seja uma aula realizada no ambiente universitário (sendo, efetivamente, aquela aula), ela é vislumbrada como uma experiência promotora de outra.

ter conhecimentos que já fazem parte da cultura local e poderão utilizá-los no estudo e compreensão do fenômeno.

Na prática com Modelagem Matemática os alunos se tornam sujeitos à um processo cognitivo, permitindo que eles enxerguem além, reconhecendo, via contextualização, como determinado conteúdo matemático é importante na tomada de decisão em sociedade. A Modelagem Matemática é, nesse sentido, aquela que possibilita a resolução de um problema, produzindo novas ideias e trazendo senso crítico ao aluno, no que diz respeito às diferentes situações que moldam o seu cotidiano.

No contexto da pesquisa em Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática, existem diversas concepções e indicações a respeito de como se orientar por meio da Modelagem Matemática a prática, dentre essas, podemos destacar a concepção do Prof. Dr. Jonei Cerqueira Barbosa. Barbosa (2001) compreende a Modelagem Matemática como uma oportunidade para que os alunos possam investigar as situações por meio da Matemática, sem caminhos preestabelecidos, ou seja, as possíveis soluções se encaminham de acordo com o desenvolvimento da atividade.

Outro conceito importante é o de modelo matemático que está relacionado ao modo como o aluno sistematiza esse desenvolvimento, o que torna a prática de caráter mais aberta. Para Barbosa (2001), a criação de um modelo matemático está atrelada ao uso de qualquer representação matemática, desde que os estudantes consigam representar, adequadamente, uma situação em estudo, isto é, seja descrevendo-a, interpretando-a, ou até mesmo fazendo uso de uma previsão. Assim, a Modelagem Matemática assumida nesse estudo pode ser considerada como “[...] um ambiente de aprendizagem em que os alunos são convidados a problematizar e investigar, por meio da Matemática, situações com referência na realidade” (BARBOSA, 2001, p. 6).

Nessa perspectiva, a Modelagem Matemática rompe com o paradigma do currículo que, segundo Machado (1995), é o problema que se diz respeito ao ensino e à aprendizagem da matemática. Quando os conteúdos a serem estudados são definidos antecipadamente, automaticamente, o professor limita a participação ativa do aluno na resolução da atividade, diferentemente do que ocorre na Modelagem Matemática, cujo conteúdo emerge das necessidades e estratégias mobilizadas por aqueles que modelam.

O ambiente é gerado como um convite feito aos alunos. Portanto, a escolha do tema ou o questionamento para introduzir uma atividade deve ser realizada com uma intencionalidade, levando em consideração os conhecimentos já adquiridos pelos alunos

e a realidade em que estão inseridos. Em síntese, a Modelagem Matemática só é feita se houver interesse dos alunos e, para tanto, Barbosa (2004), sugere:

- Preferencialmente trabalha-se em grupo;
- Não exige a obrigatoriedade da criação de modelos; pode ser compreendida em concordância com a Educação Matemática Crítica, não se fechando na construção de modelos nem em conteúdos programáticos da Matemática;
- Não existe um caminho predeterminado. O professor pode começar pela forma que se sente seguro.

Para isso, classifica três possibilidades:

Caso 1: O professor leva para a sala de aula uma situação problemática do dia a dia, e os alunos, juntamente com o professor, buscam caminhos para solucioná-la. Não é preciso que eles procurem dados fora da sala de aula. Todo o trabalho se dá a partir da situação e do problema oferecido pelo professor.

Caso 2: O professor leva para a sala de aula uma situação problemática do dia a dia. Os alunos coletam as informações qualitativas e quantitativas necessárias para a resolução do problema e, junto com o professor, simplificam e resolvem o problema.

Caso 3: Os alunos participam de todas as etapas, desde a escolha da situação problemática até a resolução desse problema. Os alunos, juntamente com o professor, formulam e resolvem problemas. Eles também são responsáveis pela coleta de informações e simplificação das situações-problema.

Considerando essas sugestões teórico-metodológicas sobre Modelagem Matemática, desenvolvemos uma prática com uma atividade em uma aula simulada, visando angariar experiências para a prática profissional. A seguir, apresentamos elementos que constituíram o relato da prática com Modelagem Matemática e, em seguida, refletimos sobre alguns aspectos formativos em Modelagem Matemática oportunizados por esta experiência.

3 A prática na aula simulada: quanto de suco tem uma laranja?

De acordo com informações já apresentadas, a atividade de Modelagem Matemática aqui descrita foi desenvolvida com os estudantes da Licenciatura em Matemática. Ainda que as duas primeiras autoras sejam alunas da mesma turma, naquele momento, ambas não tinham experiência com Modelagem Matemática e estiveram sob a orientação do terceiro autor, sob a supervisão da quarta autora.

A partir deste momento, a narrativa é construída pelas alunas. Foi decidido propor uma atividade de Modelagem Matemática porque o Estágio de regência se apoiaria nos pressupostos da Modelagem Matemática. A experiência aqui planejada e conduzida aponta elementos convergentes ao Caso 2, proposto por Barbosa (2004). Destacamos também que essa atividade foi adaptada do livro: Modelagem Matemática na Educação Básica (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012) e a problemática que permeou a aula foi a seguinte: **“Quanto de suco tem uma laranja?”**.

Ao pensarmos na atividade, as nossas preocupações estiveram relacionadas aos possíveis “modelos” que seriam propostos pelos alunos e em como conduzíamos uma aula nessa perspectiva de ensino. Consideramos que o ato de explorar os possíveis modelos foi influência de experiências anteriores com a área de ensino, cuja abordagem predominante na formação foi o Ensino Exploratório. Embora pareça incoerente do ponto de vista teórico com a concepção de Modelagem Matemática assumida, essa tentativa de “cercar as possibilidades de resolução” foi uma estratégia utilizada para conferir segurança e encaminhar as tomadas de decisões na prática.

Por ser uma primeira experiência, seria um desafio, tanto para nós quanto para os alunos por se tratar de uma abordagem que nos tira da **zona de conforto**, isto é, de uma prática em que quase tudo é conhecido, previsível e controlável (PENTEADO, 2001), para outra em que o aluno se torna protagonista do processo de aprendizagem. Estávamos receosas em como os alunos iriam lidar com essa abordagem e se eles se interessariam na realização da atividade proposta.

Nosso planejamento da aula com a Modelagem Matemática nos levou a estabelecer os possíveis caminhos que os alunos poderiam seguir para o estudo e representação da situação e nos fez refletir sobre os questionamentos que faríamos, caso fosse necessário. Além disso, exigiu que pensássemos em uma estratégia para propor o convite para a atividade de modo que fosse motivadora, gerando nos alunos o desejo de realizá-la. Sabíamos que os colegas da nossa turma, de modo geral, optam pela escolha do suco de laranja quando frequentam bares e restaurantes e, por ser algo presente na realidade de cada um, utilizamos esse caminho para propor a atividade de Modelagem Matemática.

A atividade foi desenvolvida em uma hora, iniciada por meio de um convite à discussão que começou com a apresentação de uma reportagem⁶ com o auxílio de *slides*. A reportagem tratava do aumento da procura por produtos saudáveis em restaurantes durante a pandemia da Covid-19, dentre eles, a procura por bebidas que teve um aumento significativo foram os sucos naturais. Uma pesquisa realizada, apontou que o suco mais procurado foi o de laranja, por seus grandes benefícios envolvendo o sistema imunológico. Essas evidências geraram uma discussão envolvendo o benefício do suco e a preferência de cada um na escolha do sabor.

Após essas discussões e reflexões, questionamos sobre a quantidade de laranja que seria necessária para preparar um copo de suco de laranja de 400 ml. A resposta da maioria foi: “depende do ‘peso’ e do tamanho da laranja”. Fizemos então um novo questionamento: “**quanto de suco que possui uma laranja?**” e perguntamos também se era possível fazer uma estimativa. A partir desses questionamentos, a turma ficou animada e alguns se dispuseram a pensar matematicamente sobre esse assunto.

Diante desse questionamento, os estudantes foram divididos em 2 grupos de 5 alunos cada, aqui denominados por Grupo 1 e Grupo 2. Na sequência, cinco laranjas foram entregues para cada um dos grupos para a realização da experiência. Também, sobre uma mesa, disponibilizamos diversos materiais, sendo eles: espremedor de laranjas, fita métrica, copos plásticos, provetas graduadas, balança, entre outros, conforme a Figura 1 e pedimos para que tentassem estabelecer relações matemáticas para estimar a quantidade de suco de uma laranja.



Figura 1: Materiais disponíveis na mesa
Fonte: arquivo próprio (2022).

⁶ Reportagem adaptada de Suco de laranja não concentrado tem mercado mais aquecido após pandemia, por Jorge Costa da Louis Dreyfus Company (LDC), do site Notícias Agrícolas, publicado em 27/06/2022 (COSTA, 2022).

Era nítida a empolgação dos acadêmicos nas escolhas dos materiais que usariam para tentar estimar a quantidade de suco; houve diversas discussões nos grupos em como poderia ser feito, se era mesmo possível estimar a quantidade. A turma mostrou-se empolgada e engajada na temática, tanto que os grupos exploraram diversos materiais disponíveis na mesa.

Após as escolhas dos materiais, os grupos começaram a traçar as suas estratégias, observando o que poderia ser explorado nas laranjas e nós, na condição de professoras-estudantes, fomos acompanhando o desenvolvimento em cada grupo. Na sequência passemos a descrever como cada um dos grupos conduziu o processo de investigação, tal qual eles solucionaram o problema, valendo-nos dos registros apresentados por eles e, posteriormente, apresentaremos as reflexões ensejadas pelas representações elaboradas.

Grupo 1

Os membros do grupo ficaram em dúvida se era necessário cortar a laranja para fazer a estimativa. Um dos alunos disse que poderia relacionar a laranja com a esfera, então, sugeriu usar o volume da laranja para realizar a estimativa. Outros alunos pensaram em usar a circunferência da laranja para relacionar com a quantidade de suco. No processo de negociação, chegaram à conclusão que seria mais viável utilizar a medida da circunferência e relacioná-la com a quantidade de suco, dando início à produção de dados quantitativos, conforme a estratégia representada na Figura 2.



Figura 2: Produção de dados quantitativos – medindo a circunferência da laranja
Fonte: arquivo próprio (2022).

Eles realizaram as coletas espremendo as laranjas e anotando as informações em uma folha de papel para que pudessem relacionar a medida da circunferência com a quantidade de suco que a laranja fornecia. Após a coleta de dados, no grupo, surgiram vários questionamentos sobre como seria possível representar, algebricamente, aquelas informações. Observando o registro que organizaram (Figura 3a), vislumbraram que se

tratava de duas variáveis x e y , as quais relacionaram medida do tamanho da circunferência e quantidade de suco, respectivamente. Os dados produzidos foram apresentados no plano cartesiano, localizando os pares ordenados, conforme a Figura 3b.

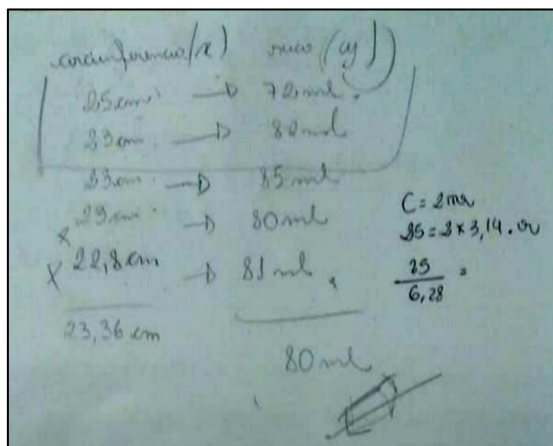


Figura 3a: Matematização da situação realizada pelo Grupo 1
Fonte: dos registros dos estudantes (2022)

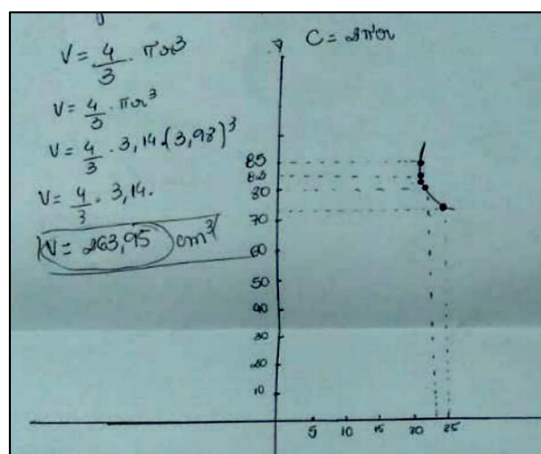


Figura 3b: Matematização da situação realizada
Fonte: dos registros dos estudantes (2022).

Observaram que a reta que passaria pelos pares ordenados seria uma reta decrescente. Em seguida, utilizaram a equação reduzida da reta para encontrar a função correspondente à quantidade de suco que possui uma laranja de circunferência (x), conforme o registro na Figura 4. Chegaram a um modelo correspondente aos dados obtidos por eles, nesse caso:

$$y = (-5) \cdot x + 197$$

Para determinar, aproximadamente, a quantidade de suco de uma laranja (y), basta utilizar o tamanho da circunferência.

$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \Rightarrow a = \frac{72 - 72}{25 - 23} \Rightarrow a = \frac{-10}{2} \Rightarrow a = -5$$
$$y = ax + b$$
$$72 = -5(25) + b$$
$$72 + 125 = b$$
$$b = 197$$
$$y = -5x + 197$$

Figura 4: Modelo apresentado pelo G1
Fonte: dos registros dos estudantes (2022).

Na oportunidade, foi discutido sobre as implicações desse modelo à situação, por exemplo, em que medida ele seria apropriado para expressar esse fenômeno “suco da laranja”. A constatação de um modelo linear decrescente, embora seja coerente com o conjunto de dados, não evidenciou uma representação que parecesse coerente com a realidade. Nesse sentido, no grande grupo, os estudantes não validaram o modelo encontrado.

Grupo 2

Os membros do Grupo 2 iniciaram questionando se a laranja maior tinha a maior quantidade de suco. Em consenso, chegaram à conclusão de que, nem sempre a maior laranja terá a maior quantidade de suco, porque depende de outras variáveis como, a variedade e o processo de produção da laranja, isto é, se ela está “seca” ou não. Discutiram que talvez uma laranja com medida de circunferência maior pode estar “seca” e fornecer menos quantidade de suco do que uma laranja com medida de circunferência inferior.

Após essa discussão, pensaram em relacionar a massa da laranja com a quantidade de suco, porém, seria necessário descartar aquela massa referente ao bagaço. Observaram a laranja como um todo e começaram a produzir todos os dados possíveis, conforme a Figura 5, na tentativa de estimar o melhor resultado e, nesse contexto, o modelo matemático.



Figura 5: Produção dos dados realizada pelo G2
Fonte: arquivo próprio (2022).

Os estudantes coletaram as medidas da circunferência, massa da laranja, massa da casca, quantidade de suco da laranja e a massa do suco da laranja e foram anotando em uma tabela os dados correspondentes à cada laranja. Observaram que poderiam determinar uma função a partir dos pares ordenados e, após essa coleta, iniciou-se uma nova discussão sobre quais seriam as variáveis que determinaria o melhor modelo para expressar a quantidade de suco da laranja.

No processo de argumentação sobre, chegaram à conclusão de que poderiam utilizar a massa da laranja, pois a massa da casca não interferia na quantidade de suco da laranja, então optaram em usar a massa da laranja relacionando-a à quantidade de suco, conforme a Figura 6.

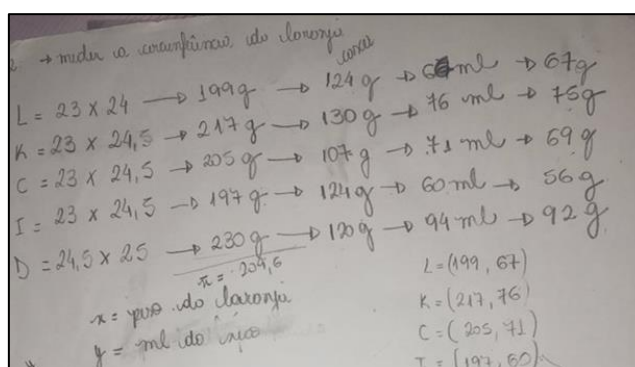


Figura 6: Resolução e modelos produzidos pelo G2
Fonte: dos registros dos estudantes (2022).

Em seguida, representaram os pares ordenados no plano de cartesiano, traçando uma reta pelos pares ordenados e obtiveram uma reta crescente, como ilustrado na Figura 7, confirmando a ideia inicial, que poderiam utilizar a função para representar a situação, delimitando um modelo matemático expresso em:

$$Y = 1,0303 \cdot x - 142,969$$

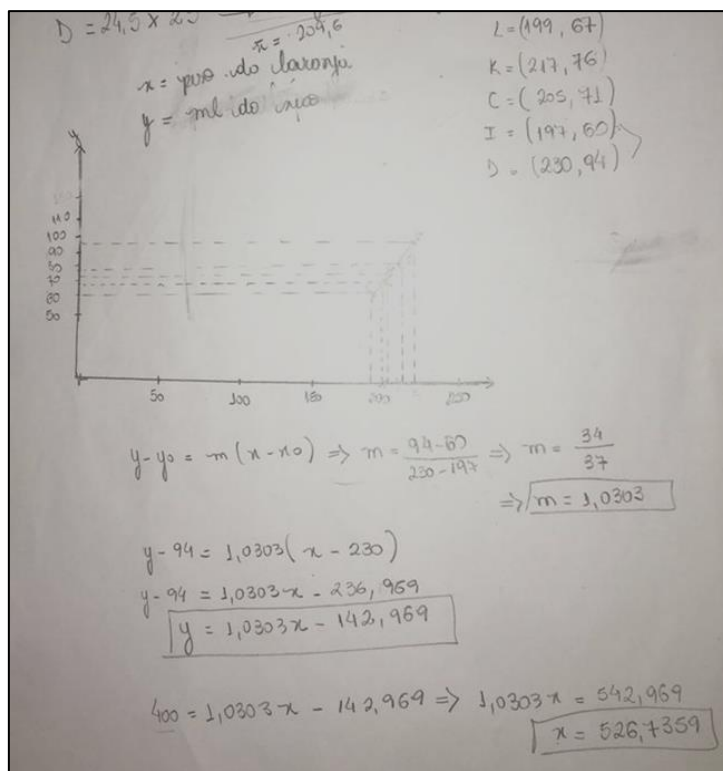


Figura 7: Resolução e modelos produzidos pelo G2
Fonte: dos registros dos estudantes (2022).

Como remate da experiência, cada um dos grupos foi convidado a compartilhar as suas produções com os demais colegas. Passemos, portanto, a congregiar algumas dessas discussões na próxima sub-seção

3.1. Uma reflexão sobre as representações matemáticas elaboradas

No contexto desta prática, discussões sobre a natureza e procedimentos que ensejaram a construção dos modelos elaborados foram fomentadas.

Num primeiro momento, o Grupo 1 foi convidado a expor os caminhos que trilharam e, mediante as tomadas de decisões, as representações elaboradas por eles. Assim, os membros deste grupo apresentaram o gráfico produzido a partir dos dados, gerando curiosidades nos participantes do outro grupo e questionamentos sobre qual seria a interpretação do gráfico exposto.

Imediatamente, os alunos do Grupo 1 responderam que o gráfico mostrava que quanto maior a medida do comprimento da circunferência da laranja, menor a quantidade de suco, isso por conta dos dados obtidos das laranjas que foram espremidas. Como justificativa, os alunos explicaram que as laranjas tinham as medidas muito próximas, assim como, a força empreendida para extrair o suco de cada uma delas pode ter

influenciado no resultado. Nesse sentido, fomentou-se uma discussão de que o modelo encontrado era adequado para aquele conjunto particular de dados, mas quando consideradas outras laranjas, ele parecia não ser adequado.

Nesse sentido, o modelo se tornava descritivo, isto é, ele descrevia os dados que foram obtidos em função da atividade experimental para investigar “**quanto de suco que possui uma laranja?**”, mas ao perguntamos também se era possível fazer uma estimativa, sugeriram que o modelo não era eficiente, sobretudo, se confrontássemos com a realidade.

Já o Grupo 2, ao apresentar sua produção justificou que, inicialmente, aconteceu o mesmo ocorrido que no outro grupo, pois suas laranjas tinham as medidas muito próximas. Entretanto, diferente do outro grupo, eles optaram por usar a balança e foi o que diferenciou nos resultados obtidos. Argumentaram que o gráfico encontrado foi de uma função crescente, o que indica que quanto maior a medida de massa, maior será a quantidade de suco presente na laranja. Foi consenso de que, considerando o conjunto de dados obtidos por ambos os grupos, o modelo criado pelo Grupo 2 atendeu de modo satisfatório ambos os desafios, quanto de suco uma laranja possui e se era possível fazer uma estimativa.

Assim, os futuros professores concluíram que, generalizando, nessas funções encontradas, sob essa perspectiva da Modelagem Matemática, é possível prever a quantidade de suco existente em uma laranja.

Explicitadas as produções encaminhadas por cada um dos grupos, passemos a algumas reflexões que, num movimento de análise, foram oportunizadas no contexto da prática.

4 Algumas reflexões sobre a formação de professores em modelagem matemática a partir da experiência vivida

Tendo em vista ser esta a primeira experiência e produção acadêmica das primeiras duas autoras, nos pareceu apropriado refletir sobre a Formação em Modelagem Matemática das futuras professoras pelo caminho da reflexão sobre a própria prática, isto é, refletir sobre a Formação de Professores em Modelagem Matemática, a partir de uma primeira experiência vivida com Modelagem Matemática, na condição de professoras.

Para tanto, retomamos em dois episódios que estruturaram a prática com Modelagem Matemática:

4.1 Contexto e planejamento:

As reflexões que ensejaram este episódio foram motivadas por aspectos que denominamos como **contexto** e **planejamento**, os quais nos permite refletir sobre aspectos formativos favorecidos pela experiência.

Esta primeira experiência prática com Modelagem Matemática conduziu a analisarmos que, por ser uma abordagem pouco trabalhada no dia a dia, gera um certo receio em e ao levá-la para sala de aula. Receio este que pode estar atrelada à condição de os alunos não aceitarem a proposta e dificultar a abordagem com ela, pois sabemos que por meio desta abordagem pedagógica, os conteúdos vão surgindo conforme o trabalho vai se desenvolvendo.

Talvez esse seja um dos argumentos que distancia a Modelagem Matemática da sala de aula, pois isso dificulta nossa ação já que não sabemos quais conteúdos surgirão a partir do tema escolhido. Entendemos que essa reflexão está alinhada às resistências e obstáculos (CEOLIM; CALDEIRA, 2017). Porém, sabemos que é necessário que os (futuros) professores e estudantes saiam do comodismo e comecem a pensar, desenvolvendo produções até encontrar o desejado, sob a orientação do professor. Entendemos que habilidades são conquistadas quando uma prática é planejada e ao ser desenvolvida, exige-se alta dose de criatividade, colaboração, argumentação, justificação, reflexão, raciocínio, entre outros como é na Modelagem Matemática.

Assim, refletimos que as dificuldades são contornadas quando “colocamos na balança” a aprendizagem favorecida e a quantidade de relações matemáticas que podem ser estabelecidas, como evidenciou esta experiência. Ainda que possíveis resoluções e dúvidas dos alunos foram supostas, no decorrer da aula foram surgindo dúvidas que, de antemão, não havíamos pensado. Essa constatação nos levou a refletir que por mais que nos sintamos “preparadas”, nunca estaremos prontas.

Desta reflexão, dois aspectos são emergentes: o **contexto** e o **planejamento**.

Quanto ao primeiro, destacamos a **aula simulada** como ambiente de ação formativa para, talvez, driblar os desconfortos que podem surgir na primeira experiência com Modelagem Matemática. A pesquisa de Oliveira (2020, p. 287) desenvolvida com estagiários revelou que “[...] as simulações se mostraram como uma ação que se configura um espaço/tempo para compreensão de conteúdos e metodologias, isto é, de aprendizagem docente”.

Os indícios de aprendizagens docentes estiveram condicionados, “[...] à oportunidade que os docentes têm para discutirem e indicarem aspectos dirigidos às práticas com Modelagem Matemática” (OLIVEIRA, 2020, p. 287), pois configurou-se em oportunidades para tomada de consciência sobre (a prática com) Modelagem Matemática mediante o compartilhamento e reflexão de ideias que transcenderam o planejado, bem como a ressignificação da dinâmica tendo em vista a realização de outra experiência.

Entendemos que a experiência que aqui compartilhamos converge para essas potencialidades quando, antes, durante e depois dela, sobretudo para a própria sistematização da primeira versão deste texto, nos aproximamos dessa reflexão.

A ser desenvolvida neste contexto, o outro aspecto que destacamos é o **planejamento** da prática. Entendemos que quando tentamos prever as possíveis soluções dos estudantes, talvez, para esse encaminhamento tenhamos tido influências de outra perspectiva, o Ensino Exploratório, cuja etapa é conhecida por **antecipação**. Alertamos que, na Modelagem Matemática essa nos parece uma discussão profícua para ser aprofundada, o planejamento da prática com Modelagem Matemática e, no contexto dela, a atividade. Produções como as de Pinto (2020) sobre planejamento e Sant’ana e Sant’ana (2009) sobre a natureza dos problemas de Modelagem Matemática, podem subsidiar algumas reflexões.

Tendo em vista que “planejar é antecipar mentalmente uma ação a ser realizada e agir de acordo com o previsto. [...] não é, pois, apenas algo que se faz antes de agir, mas é também agir em função daquilo que se pensou” (VASCONCELLOS, 2015, p. 79), conjecturamos que para a prática com Modelagem Matemática por mais que seja imprevisível, admite-se um planejamento, já que este também sugere essa flexibilidade e ajustes pedagógicos no fluxo da experiência.

À luz desse enquadramento teórico, segundo Pinto (2020), o planejamento de uma prática com Modelagem Matemática por professores que possuem pouca vivência com ela pode ser iniciado **por um tema ou por uma situação-problema** ou ter como ponto de partida **outra experiência pedagógica**. A autora também destacou um dos aspectos que realizamos no planejamento desta prática, a tentativa de abarcar conteúdos matemáticos na previsão de estratégias e soluções como um dos elementos. Este foi um dos itens manifestados em planos de atividades de Modelagem Matemática elaborados por professores.

[...] o plano construído por esses docentes compreendeu elementos de um plano geral [...] como, por exemplo, **conteúdos matemáticos abordados na atividade, público para o qual a atividade será desenvolvida e duração da atividade** e compreendeu elementos de planos de ensino ou de aula mais específicos de atividades de modelagem [...] como **escolha do tema da atividade e situação-problema a ser investigada pelos estudantes, público para o qual a atividade seria desenvolvida e organização dos alunos em sala de aula** (PINTO, 2020, p. 124).

Outros elementos também foram apontados como características de um planejamento coletivo em atividades de Modelagem Matemática compreendendo-o como um “[...] instrumento de intervenção social [...], desenrolando-se como um processo de reflexão, tomada de decisão, colocação em prática e acompanhamento [...] na investigação de um problema real por meio da matemática” (idem, p. 124). Refletimos que esse planejamento se mostra relevante, portanto, à prática do professor em formação que inicia e almeja ter a Modelagem Matemática como mais uma opção de abordagem pedagógica.

4.2 Desenvolvimento e representação:

Este episódio abarca reflexões promovidas no contexto da prática com a atividade proposta. Ao analisarmos o caminhar de ambos os grupos, refletimos que eles representaram, matematicamente, a situação com modelos matemáticos que consideramos adequados. O Grupo 1, estabeleceu uma relação de medida da circunferência com a quantidade de suco de laranja. O Grupo 2, estabeleceu diversas relações, optando em trabalhar com massa relacionando à quantidade de suco. Diante disso, indagamos sobre o impacto dessa tomada de decisão por parte dos alunos em adotar caminhos diferentes, no tocante ao nosso papel como professoras.

Numa aula que não seja de Modelagem Matemática ou de qualquer outra abordagem situada em um paradigma menos investigativo, isso pode não acontecer. Assim, entendemos que delegamos aos estudantes a tarefa de pensarem, de serem autônomos, na definição de caminhos, de elencar hipóteses, de definir estratégias e de representar, por meio de uma linguagem matemática, aquilo que pode ser consideradas soluções. Nesse percurso (sem fim, por que novas investigações sobre outros temas podem surgir), há uma ressignificação sobre “aulas de Matemática” articulado aos papéis que são construídos pelos que fazem da prática ser com Modelagem Matemática.

Essas características da prática com Modelagem Matemática se revelam aos professores na medida em que “**ensinam usando**” Modelagem Matemática (ALMEIDA;

DIAS, 2007), uma das condições para que o futuro professor possa conhecer o **desenvolvimento** que geram as **representações**, as quais descrevem, expressam, traduzem, ilustram, preveem, valendo-se de uma linguagem matemática, os temas estudados.

Neste desenvolvimento, refletimos que, de modo geral, os conceitos matemáticos que permearam a aula foram àqueles relacionados à geometria, geometria analítica, álgebra, estatística, entre outros. Muito embora o Grupo 1 tenha apresentado adequadamente o modelo matemático, o produzido pelo Grupo 2 mostrou ser mais adequado à situação com referência na realidade. Essa discussão ficou latente no contexto da experiência.

A divergência de resultados, ainda que sutil, gerou uma discussão frutífera em relação à temática investigada. Como reagimos/lidamos com isso? Aqui, as **tensões** (OLIVEIRA; BARBOSA, 2011) são representativas dos sentimentos manifestados, sobretudo, às relacionadas com **participação dos alunos e abordagem das respostas dos alunos**, em que questionamentos do tipo “Como discutir as respostas dos alunos?” fizeram todo o sentido no contexto da experiência.

No entanto, refletimos que o enfrentamento dessas tensões com cautela é necessário para que possamos avançar e nos desenvolvermos profissionalmente por meio da experiência com Modelagem Matemática. Defendemos, nesse sentido, que essas tensões são fatores com alto potencial formativo que impulsionam a mudanças quando associadas à reflexão. Sobre esse aspecto, assim como na pesquisa de Oliveira e Barbosa (2011), em nossa prática essas tensões também estiveram presentes desde o planejamento até processo reflexivo sobre a própria prática.

Contudo, tendo em vista a intencionalidade formativa oferecida pelo contexto da experiência, enquanto movimento sugere, portanto, a **tensão da reflexão sobre a própria prática**, no sentido de saber o que e como refletir sobre a experiência, administrando também as próprias tensões emergentes na e com a prática.

Nesse sentido, às questões do tipo:

Quais perguntas fazer aos alunos na discussão do tema e das informações coletadas sobre o problema? Como fazer perguntas aos alunos? Como interagir com os alunos? Em que momento fazer as perguntas aos alunos? Em que momento organizar os alunos em grupos? Que ritmo imprimir para as atividades planejadas? Como requerer a participação dos alunos? Como discutir as respostas dos alunos? Como intervir diante das respostas dos alunos? (OLIVEIRA; BARBOSA, 2011, p. 292).

São agregados outros questionamentos quando intencionamos aspectos formativos, por exemplo: Como foi a prática? Há necessidade de rever algum encaminhamento? O que deu certo? Cumpri com os objetivos previamente estabelecidos? O tempo didático foi suficiente? Que aprendizagens foram construídas? O que eu professor(a) aprendi? Certamente, esses e outros questionamentos “entram em cena” quando objetiva-se analisar e refletir sobre aspectos que dimensionaram a própria prática.

Em outras palavras, refletimos que tanto o desenvolvimento, envolvendo o processo de mediação, quanto a discussão sobre as representações elaboradas pelos estudantes foram promotores dessas tensões, mas que, de algum modo, nos impulsionaram a conceber a Modelagem Matemática como outra possibilidade de trabalho pedagógico para os (futuros) professores que ensinam Matemática.

5 Considerações finais

Revisitar este texto com o objetivo de refletir sobre a Formação de Professores em Modelagem Matemática, a partir de uma primeira experiência vivida por duas alunas da Licenciatura em Matemática com Modelagem Matemática, na condição de professoras, nos trouxe vários contentamentos.

O primeiro deles se refere ao benefício de se optar em trabalhar com uma abordagem pedagógica que torna o aluno protagonista do seu processo de aprendizagem. Isso ficou evidente quando os estudantes tiveram que tomar decisões para dar o “pontapé” na atividade até à sua sistematização e argumentarem sobre aquilo que produziram, por exemplo, se compararmos ambas as funções que emergiram nesse estudo: “uma decrescente e outra crescente. E agora?” Uma compreensão sobre o que se faz e as circunstâncias que levaram a essa produção se tornam relevantes. Notamos que a significação das ações e da própria matemática envolvida se tornam uma condição para justificar esses aspectos, o que potencializa a aprendizagem via a Modelagem Matemática.

É nesse sentido que, enquanto futuros professores, enfatizamos a importância de se trabalhar com atividades mais investigativas, em que os alunos possam construir esse ambiente de aprendizagem com liberdade para o expor suas ideias e estratégias, tornando-se sujeitos críticos (SKOVSMOSE, 2000), tanto na vida acadêmica quanto pessoal. Ao refletirmos sobre a experiência em si, entendemos que trabalhar com a Modelagem Matemática enquanto professoras, foi desafiador.

Para nós, foi necessário sair da **zona de conforto** (PENTEADO, 2001), deixar de lado o ensino expositivo e admitir uma prática em que estudantes fossem protagonistas na aula. Apesar de os desafios, instigar e levar os alunos a pensarem, gerando neles prazer em participar das atividades propostas é oferecer condições para que se torne aluno protagonista do conhecimento. Diante dessa experiência, ficamos menos apreensivas em trabalhar, novamente, com essa abordagem, pois pudemos ver, na prática, que ela funciona e, por mais que planejem algumas questões, a imprevisibilidade toma conta do ambiente que constituímos.

Depois desta, outras novas experiências foram realizadas e novos elementos foram inseridos em nosso repertório pedagógico, refinando o nosso modo de ver e encarar a Modelagem Matemática. A oportunidade de refletirmos sobre o processo formativo e o “produto” por ele gerado, se é que podemos assim designar um material intelectual com características didáticas e pedagógicas, nos move a cada vez mais para a defesa da Modelagem Matemática como outro modo de formar o professor que ensina Matemática nos diferentes níveis de ensino.

Entendemos que outras questões poderiam ser levantadas nesta reflexão, mas esperamos que essa prática e as reflexões que ela ensejou possam inspirar outros (futuros) professores a realizar uma prática com Modelagem Matemática, encorajando-os para que práticas mais investigativas sejam promotoras de aprendizagens. Contudo, não podemos ser negligentes ao ponto de desconsiderar o cerne da discussão deste texto, os aspectos formativos. Assim, também esperamos que os processos formativos possam, cada vez mais, contemplar experiências com Modelagem Matemática que fundamentem, numa relação teoria e prática, as ações empreendidas nas salas de aulas.

Referências

ALMEIDA, L. M. W. de; SILVA, K. A. P. da; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Modelagem matemática em cursos de formação de professores. *In*: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. L. (org.). **Modelagem matemática na educação matemática brasileira: pesquisas e práticas educacionais**. Recife: SBEM, 2007. p. 253-268.

BARBOSA, J. C. **Modelagem matemática: concepções e experiências de futuros professores**. 2001. 253 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? **Veritati**, n. 4, p. 73- 80, 2004.

CEOLIM, A. J.; CALDEIRA, A. D. Obstáculos e dificuldades apresentados por professores de matemática recém-formados ao utilizarem modelagem matemática em suas aulas na educação básica. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 31, n. 58, p. 760-776, 2017.

COSTA, J. **Suco de laranja não concentrado tem mercado mais aquecido após pandemia**, por Jorge Costa da Louis Dreyfus Company (LDC). Notícias Agrícolas, Matão, 26, junho. 2022. Disponível em: < <https://www.noticiasagricolas.com.br/artigos/artigos-geral/320793-suco-de-laranja-nao-concentrado-tem-mercado-mais-aquecido-apos-pandemia-por-jorge-costa-da-louis-dreyfus-company-ldc.html#.ZEu1WHbMLIU>>. Acesso em: 20 de abr. de 2023.

KLÜBER, T. E. Formação de professores em Modelagem Matemática na Educação Matemática brasileira: questões emergentes. **Educere et Educare**, v. 12, n. 24, 2017.

MACHADO, N. J. **Epistemologia e Didática**: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. São Paulo, Cortez, 1995.

OLIVEIRA, A. M. P. de; BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática e situações de tensão e as tensões na prática de Modelagem. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 24, n. 38, p. 265-296, 2011.

OLIVEIRA, W. P.; KLÜBER, T. E. Formação de professores em Modelagem Matemática: uma hermenêutica dos relatórios do GT 10 – Modelagem Matemática da SBEM. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 19, n. 2, p. 167-186, 2017.

OLIVEIRA, W. P. **Modelagem Matemática no Estágio Pedagógico**: uma investigação fenomenológica. 2020. 504 f. (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Maringá, 2020.

OLIVEIRA, W. P. A perspectiva formativa em modelagem matemática: um novo terreno para a pesquisa brasileira? **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 14, n. 2, p. 1-15, 2023.

PENTEADO, M. G. Implicações para a prática docente. In: BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. cap. 4, p. 53-68.

PINTO, T. F. **A Elaboração de Planejamento de atividades de Modelagem Matemática por Professores com pouca vivência em Modelagem**. 2020. 143f. (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2020.

SANT'ANA, A. A.; SANT'ANA, M. F. Uma experiência com a elaboração de perguntas em Modelagem Matemática. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6. **Anais [...]**. Londrina: SBEM, 2009. p. 1-13. 1 CD-ROM.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, n. 14, p. 66-91, 2000.

VASCONCELLOS, C. dos S. **Planejamento**: projeto de ensino-aprendizagem e projeto político pedagógico. 25. ed. São Paulo: Libertad, 2015.

Recebido em: 285 de abril de 2023

Aceito em: 05 de julho de 2023