

## DESCRIÇÃO DO PERFIL DO FUSTE DE ÁRVORES POR MEIO DAS FUNÇÕES DE AFILAMENTO

Marcos Felipe Nicoletti<sup>1\*</sup>; Sebastião do Amaral Machado<sup>2</sup>; Samuel de Padua Chaves e Carvalho<sup>3</sup>; Afonso Figueiredo Filho<sup>4</sup>; Carlos Roberto Sanquetta<sup>2</sup>

SAP 13318 Data envio: 15/12/2015 Data do aceite: 22/01/2016  
Sci. Agrar. Parana., Marechal Cândido Rondon, v. 15, n. 4, out./dez., p. 365-372, 2016

**RESUMO** - O objetivo desse trabalho foi resumir informações a respeito da utilização da modelagem do perfil do tronco de árvores por meio das funções de afilamento. Sabe-se que vários fatores exercem influência no crescimento das árvores e por consequência, na forma do tronco das mesmas. Com isso, as funções de afilamento são responsáveis por estudar a forma do tronco e suas variações que afetam diretamente no planejamento florestal. Assim, a modelagem é a ferramenta capaz de descrever o perfil do tronco e auxiliar no direcionamento da produção florestal para os diferentes segmentos empresariais. Visando melhorar as estimativas do inventário florestal, o aprimoramento das técnicas estatísticas de modelagem no país já fornecem resultados consideráveis. Exemplo disso tem-se os modelos mistos e a modelagem multivariada que inovam nesse segmento. Essas abordagens melhoraram ainda mais a precisão das estimativas, diminuindo custos e facilitando a tomada de decisões no manejo florestal.

**Palavras-chave:** manejo florestal, modelagem, multiproduto, sortimento florestal.

### *DESCRIPTION STEM PROFILE OF TREES THROUGH THE TAPER FUNCTIONS*

**ABSTRACT** - The objective of this study was to summarize information about the use of modeling the stem profile of trees through taper functions. It is known that some factors influence the growth of trees and consequently the stem profile. Then, the taper functions are responsible to study the stem profile and its variations that affect directly in forest planning. Thus, the modeling is a tool able to describe the stem profile and conduct the forest production for the different business. Aiming to improve the estimates of forest inventory, the improvement of statistic technical of modeling in the country already provide considerable results. Examples are mixed models and multivariate modeling innovate in this segment. These approaches have been used to improve the precision of the estimates, reducing costs and facilitating decision making in forest management.

**Key words:** forest management, modeling, multiproduct, forest assortment.

### INTRODUÇÃO

No Brasil, a área de florestas plantadas para fins industriais totalizou 7,74 milhões de hectares em 2014 (IBÁ, 2015). Esse total corresponde a apenas 0,9% do território brasileiro. Os plantios de *Eucalyptus* ocupam 5,56 milhões de hectares (71,9% do total) distribuídos na sua maioria no sudeste do país. Logo, os plantios de *Pinus* ocupam 1,59 milhão de hectares (20,5% do total) e concentram-se principalmente no Paraná (42,4%) e em Santa Catarina (34,1%).

As áreas de florestas plantadas representam cerca de 91% de toda a madeira produzida para fins industriais no país, restando 9% para as florestas nativas legalmente manejadas. O setor de árvores plantadas reúne uma gama de empresas, investidores e empreendedores que atuam desde o fornecimento de insumos e máquinas específicas

para a atividade florestal. Sabe-se também que os plantios florestais desempenham importante papel na prestação de serviços ambientais e socioambientais (IBÁ, 2015).

O Brasil é líder no ranking global de produtividade florestal das principais espécies cultivadas. Enquanto o país possui incremento médio anual (IMA) volumétrico de 39 m<sup>3</sup> ha<sup>-1</sup> ano<sup>-1</sup> para *Eucalyptus* e 31 m<sup>3</sup> ha<sup>-1</sup> ano<sup>-1</sup> para *Pinus*, os outros cinco principais países com tradição florestal (EUA, África do Sul, Chile, Austrália e China) apresentam IMA de 19,6 m<sup>3</sup> ha<sup>-1</sup> ano<sup>-1</sup> e 17,6 m<sup>3</sup> ha<sup>-1</sup> ano<sup>-1</sup>, respectivamente. A excelente produtividade anual resulta da combinação de inúmeros fatores que nosso país dispõe. Isso certamente é consequência dos investimentos das empresas em pesquisas e desenvolvimento florestal, priorizando a melhoria da genética dos plantios e das técnicas de manejo florestal (IBÁ, 2015).

<sup>1</sup>Universidade do Estado de Santa Catarina, UDESC, Centro Agroveterinário, Av. Luis de Camões 2090, CEP 88520-000, Lages, Santa Catarina, Brasil. E-mail: [marcos.nicoletti@udesc.br](mailto:marcos.nicoletti@udesc.br) \*Autor para correspondência

<sup>2</sup>Curso de Engenharia Florestal, Departamento de Ciências Florestais, Universidade Federal do Paraná, UFPR, Rua Lothário Meissner 632, Jardim Botânico, CEP 80210-170, Curitiba, Paraná, Brasil

<sup>3</sup>Universidade Federal de Mato Grosso, UFMT, Av Fernando Correa da Costa 2367, Boa Esperança, CEP 78060900, Cuiabá, Mato Grosso, Brasil

<sup>4</sup>Centro de Ciências Agrárias e Ambientais, Universidade Estadual do Centro-Oeste, Unicentro, PR-153 km 7, Bairro Riozinho, CEP 84500-000, Iratí, Paraná, Brasil

Dessa maneira, devido a sua alta gama de utilizações, as florestas plantadas de pinus vêm sendo manejadas para produzir madeira para diversos fins (multiprodutos). Toras de grandes diâmetros são destinadas para laminadoras e serrarias, enquanto as de médio e pequeno diâmetro são utilizadas nos segmentos de papel e celulose, painéis e energia (GONÇALVES; BENEDETTI, 2000).

## DESENVOLVIMENTO

### Forma do tronco de árvores

A forma do tronco pode ser definida como a diminuição gradual do diâmetro à medida que se aumenta a altura da árvore. Os fustes das árvores apresentam formas bastante variáveis, que podem modificar-se conforme a espécie e até mesmo dentro da mesma espécie. A forma varia de indivíduo para indivíduo, conforme as condições de sítio, o espaçamento inicial, tratamentos silviculturais aplicados e a posição sociológica em que cada árvore se desenvolve. Varia também ao longo da idade, quer como um fenômeno evolutivo natural, ou como resultado das várias fases de concorrência relativas às árvores vizinhas (LARSON, 1963; FINGER et al., 1995).

Experiências têm demonstrado que cada espécie, nos seus diversos estádios de desenvolvimento, possui características de afilamento diferenciadas (SCOLFORO et al., 1998). Árvores com mesmo diâmetro e mesma altura podem apresentar volumes e sortimentos distintos, se a forma dos fustes for diferente. Assim, a forma do fuste tem sido objeto de muitos estudos, avaliando diferentes espécies, sítios, idades e regimes de manejo que buscam alcançar maior acurácia na estimativa de volumes totais e/ou parciais das árvores nos diferentes produtos (KOHLER et al., 2013; MENDONÇA, et al., 2014; FIGUEIREDO FILHO et al., 2015). Esses autores, por exemplo, analisaram a forma do fuste em *Pinus taeda*, *Eucalyptus* e *Araucária*, respectivamente, para contribuir com melhorias na estimação da produção florestal.

O tronco de uma árvore se assemelha a determinados sólidos geométricos. A base da árvore se assemelha a um neilóide, a face intermediária a um parabolóide e a extremidade final a um cone (SCOLFORO; FIGUEIREDO FILHO, 1993; AVERY; BURKHART, 1997).

Se fosse possível determinar o início e o fim de cada figura geométrica ao longo do tronco, bastaria aplicar fórmulas correspondentes aos vários sólidos geométricos ocorrentes ao longo do perfil do tronco e o volume real da árvore seria obtido. Porém, este processo é praticamente impossível, o que levou ao desenvolvimento de métodos que permitiram fazer a cubagem rigorosa (GOMES, 1957). Cubagem rigorosa é definida pela divisão da árvore em seções, de comprimentos fixos ou variáveis; em que por meio da aplicação de fórmulas geométricas, o volume dessas seções é obtido, e, por adição destas partes, o volume total da árvore é calculado (FAO, 1973).

As principais fórmulas empregadas na cubagem rigorosa são a de Smalian, a de Huber, a de Newton de forma absoluta e a de Hohenald de forma relativa. Esses têm sido empregados por florestais nos mais diferentes

países, principalmente pelas facilidades de usos que os mesmos apresentam (MACHADO; FIGUEIREDO FILHO, 2006).

### Funções de afilamento

#### Histórico

A partir do momento que se iniciou a valorizar mais as seções comerciais do tronco das árvores surgiram os primeiros estudos para desenvolver funções de afilamento. Os primeiros trabalhos foram desenvolvidos por equações do sueco Hojer (1903) em *Picea abies* L. Jonson (1910) acrescentou uma constante biológica ao modelo de Hojer, citados por Behre (1923) que desenvolveu um modelo que se assemelha à equação da hipérbole.

Desde então, muitas formas e tipos de modelos matemáticos têm sido testados e desenvolvidos. No início eram modelos relativamente simples, mas com o advento dos computadores na pesquisa florestal, a partir da década de 70, modelos mais complexos foram implementados na busca de melhores resultados. No Brasil, os primeiros estudos de taper foram o de Silva (1976) e o de Hosokawa (1976).

A partir disso, foram desenvolvidos outros trabalhos, principalmente com os modelos de Schoepfer (1966), Kozak et al. (1969), Demaerschalk (1971), Ormerod (1973), Hradetzky (1976), Max e Burkhart (1976), Ahrens e Holbert (1981), Campos e Ribeiro (1982), Silva (1982), Schneider (1986), Friedl (1989) e McTague et al. (1989), entre outros citados por Pires e Calegario (2007) e Andrade (2001).

A maioria dos modelos de perfil do tronco chega a uma forma de tronco média para todas as árvores em uma determinada população, quer usando métodos empíricos (um modelo de ajuste de dados de todas as árvores de amostra) ou defendendo uma forma particular como as hipóteses mecânicas ou biológicas. Esta abordagem não leva em conta mudanças nos perfis de árvores devido às condições do sítio em torno das árvores (NEWBERRY; BURKHART, 1986). Entretanto, em constante aprimoramento as funções de afilamento, segundo Newnham (1992) obtiveram diversas abordagens. Uma delas, e talvez a mais lógica, é o desenvolvimento de uma função separada para cada porção do fuste, com a restrição de que as funções se juntem suavemente em cada ponto de aderência como a função de Max e Burkhart (1976).

Na década de 1980, a maioria dos trabalhos, segundo Mora (2015), dedicou-se ao estudo das funções não segmentadas. Como exemplo de trabalhos iniciais tem o estudo de Borges (1981) utilizando funções não segmentadas polinomiais para estimativas de volume de madeira serrada para *Pinus taeda*; Arhens et al. (1981) usando funções de forma não segmentadas obtidas pela técnica multivariada de análise de componentes principais; Schneider (1986) e Lima (1986), trabalhando com funções de afilamento para quantificar o sortimento para *Pinus elliottii*; McTague (1989) fazendo uso da função de afilamento não segmentada para estimar o diâmetro e altura comercial para o gênero *Eucalyptus*; e Rosot (1989)

que introduziu a técnica de stepwise associada a funções de afilamento não segmentadas para *Pinus taeda*.

Exemplo disso tem-se Newnham (1988) e Kozak (1988) que iniciaram os trabalhos com modelos de forma variável nesse período. Com base nessa ideia, desenvolveram uma nova abordagem com uma função contínua que descreve a forma do fuste do solo ao topo usando um "expoente variável" para descrever o neilóide, parabolóide e formas cônicas do caule (KOZAK, 1988). A principal vantagem das estimativas por esse sistema sobre os "modelos de afilamento segmentados" é que são geralmente muito mais fáceis de ajustar e fornecem melhores estimativas de diâmetro do solo até o topo da árvore (KOZAK, 2004).

Na sequência de 1990, Mora (2015) levantou os seguintes trabalhos desenvolvidos por Figueiredo Filho (1991) que introduziu a utilização das funções splines no estudo de forma das árvores de *Pinus elliottii*; Moura (1994) utilizou 11 modelos não segmentados nas estimativas de diâmetro para espécies florestais na Amazônia Brasileira; Finger et al. (1995) utilizaram cinco funções de afilamento não segmentadas para estudar a forma de *Eucalyptus dunnii*; Schneider (1996) utilizou seis funções de afilamento não segmentadas para estudar os sortimentos das madeiras de *Eucalyptus grandis*; Scolforo et al. (1998) estudaram funções de afilamento não segmentadas para representar o perfil de *Pinus elliottii*; Drescher et al. (1999) empregaram funções de afilamento não segmentadas para estudo de *Pinus elliottii*. Ainda nesse período, Figueiredo Filho et al. (1996) foram um dos primeiros a utilizar funções segmentadas no Brasil no estudo da forma de *Pinus taeda*.

Mora (2015) reuniu também diversos trabalhos a partir dos anos 2000 até os dias atuais utilizando as funções de afilamento no Brasil. Por meio desse autor, sua utilização pode ser vista em muitos trabalhos florestais pelo ajuste de funções não segmentadas e segmentadas. Dentre os trabalhos que utilizaram essas funções têm-se: Arce (2000), Assis et al. (2001), Fischer et al. (2001), Assis et al. (2002), Soares (2002), Maestri (2003), Soares et al., (2003), Chichorro et al. (2003), Soares et al. (2004), Müller (2004), Paixão (2004), Müller et al. (2005), Cruz (2005), Leite et al. (2006), Menon (2006), Queiroz (2006), Pires e Calegário (2007), Nogueira et al. (2008), Souza (2007), Souza et al. (2008a), Souza et al. (2008b), Souza et al. (2008c), Miguel (2009), Oliveira et al. (2009), Souza (2009), Bianchini (2010), Horle et al. (2010), Santos (2010), Favalessa (2011), Silveira et al. (2011), Soares et al. (2011), Yoshitane Junior et al. (2011), Ramos (2012), Souza et al. (2012), Lanssanova (2012), Alves (2013), Campos et al. (2013), Corteletti (2013), Kohler (2013), Kohler et al.(2013), Lanssanova et al. (2013), Schröder et al. (2013), Souza (2013), Teo et al. (2013), Ferreira et al. (2014), Figueiredo Filho et al. (2014), Mendonça et al. (2014), Môra et al. (2014) e Müller et al. (2014). A grande maioria desses trabalhos utiliza como método de ajuste, modelagens lineares pela técnica de Mínimos Quadrados Ordinários e modelagem não linear por meio de processos iterativos.

Com o aprimoramento das técnicas de modelagem novas metodologias estão sendo desenvolvidas, tais como modelos do tipo expoente-forma, mistos e funções spline. Machado (2009) propõe o uso de métodos alternativos na construção de funções de afilamento para árvores individuais, visando perfis monotônicos ou com forma preservada por funções spline cúbica, potência com expoente variável e segmentada de Max e Burkhart. Nesse sentido, Andrade (2014) avaliou diferentes modelos de taper já existentes no país, sendo os modelos de característica biomatemática e do tipo expoente-forma em *Eucalyptus* na Bahia. Esses são modelos que aplicam a técnica de regressão stepwise e utiliza-se da regressão não linear para estimar uma equação de taper. Ambos demonstraram possuir ajustes superiores aqueles tradicionalmente utilizados nas ciências florestais.

Dessa forma, percebe-se que a evolução das técnicas estatísticas e matemáticas na modelagem vêm sendo aprimoradas constantemente. Logo, tem-se o surgimento de equações mais acuradas, como é o caso da modelagem de efeito misto e modelagem multivariada nas funções de afilamento no país que ainda são bem pouco difundidas.

#### Definição e Importância

O decréscimo do diâmetro do fuste da base para o topo é conhecido como afilamento ou taper. Esse adelgamento do tronco pode ser expresso por uma ou várias funções matemáticas que descrevem a tendência dessa variação (BORGES, 1981; CANCINO, 2006).

De acordo com Ahrens e Holbert (1981), uma função de afilamento é uma descrição matemática do perfil longitudinal de um tronco. Assumindo-se que a seção transversal seja circular em qualquer ponto ao longo do tronco, seu volume pode ser obtido por integração daquela função. Assim, em termos geométricos, o tronco é tratado como um sólido de revolução. Uma vez definido um modelo matemático para o afilamento, pode-se determinar o volume de madeira entre quaisquer pontos ao longo do tronco.

O emprego de funções de afilamento no setor florestal tem proporcionado uma otimização dos recursos florestais. Essas funções, devido à sua flexibilidade, possibilitam uma estratificação, ou seja, quantificação dos múltiplos produtos existentes por meio de dimensões preestabelecidas (QUEIROZ et al., 2008). Segundo Prodan et al. (1997), as funções de afilamento são uma importante ferramenta para determinação do volume de árvores e toras por permitirem estimar três características básicas das árvores: diâmetros em qualquer ponto do fuste, altura no fuste em que se encontra um determinado diâmetro e o volume entre dois pontos quaisquer no fuste.

Segundo Souza (2007), as funções de afilamento são uma excelente opção para quantificação dos sortimentos dos povoamentos florestais. A gama de informações que propiciam tem levado ao desenvolvimento de diferentes técnicas de modelagem do perfil dos fustes das espécies florestais. O sortimento florestal é o termo utilizado para resumir a avaliação

comercial qualitativa e quantitativa da floresta em pé, a partir de uma lista de diferentes multiprodutos como madeira para laminação, serraria, energia e celulose, por exemplo, e constitui-se em uma ferramenta para tomada de decisões referentes ao manejo florestal, como época de realizar podas e desbastes (ARCE, 2000).

Portanto, conforme afirma Fischer et al. (2001), a aplicação dessas funções de afilamento é um excelente instrumento para avaliar biológica e economicamente o maciço florestal e a resposta às práticas de manejo executadas, já que permite valorar de maneira detalhada quanto renderá o povoamento florestal.

#### *Classificações das Funções de Afilamento*

Na literatura há inúmeras formas de classificar as funções de afilamento, com várias formas e complexidades. Ambas as abordagens paramétricas e não paramétricas têm sido utilizadas para o desenvolvimento de modelos de afilamento. Modelos de afilamento paramétricos incluem várias funções lineares e não lineares que estimam o diâmetro, em qualquer ponto ao longo do fuste em função do DAP e, por vezes, outros preditores, variando entre polinômios simples, modelos de regressão não linear e multivariada (ROJO et al., 2005).

Desse modo, Campos e Leite (2009) diante das diferentes classificações existentes e para melhor compreensão sobre a estrutura dos modelos, agrupou-os em dois tipos gerais:

##### a) Modelos Simples:

São aqueles em que uma única função representa a forma do fuste desde a base até o ápice. Tem a vantagem de modelar todo o fuste com uma única expressão, sendo fáceis de ajustar e empregar. Segundo Prodan et al. (1997) esses modelos integram-se com facilidade, o que permite transformá-los em equações de volume, sendo ainda reordenados para o cálculo de alturas comerciais. Os modelos de Kozak e Ormerod são exemplos. Tem a desvantagem de apresentar algum erro de tendência na estimativa do diâmetro em certa porção do fuste. Entre todos os existentes alguns dos mais difundidos são: Schöepfer (1966), Kozak et al. (1969), Demaerschalk (1972), Ormerod (1973) e Hradetzky (1976).

##### b) Modelos Segmentados:

São mais difíceis de serem trabalhados e constituem uma variação dos modelos polinomiais, sendo ajustados por seções do fuste, duas ou três seções. Esses modelos procuram diminuir erros de tendência nas estimativas dos diâmetros ao longo do fuste. O clássico modelo para esta abordagem foi proposto por Max e Burkhardt (1976) em que os autores sugerem a união de três polinômios quadráticos sob restrições de continuidade.

Batista et al. (2014), além desses dois já citados anteriormente, ainda classificam as funções de afilamento como modelos de expoente variável e os modelos trigonométricos. Os de expoente variável possuem a razão do diâmetro do tronco nas diferentes alturas pelo DAP como uma potência da altura relativa, mas o expoente dessa potência varia com a própria posição relativa e com alguns atributos das árvores. Já os modelos trigonométricos captam a complexidade da forma do perfil

do tronco e simplificam a obtenção do volume do tronco via integração da equação de forma, mas por outro lado, limitam a capacidade do modelo para satisfazer as propriedades ideais das funções de forma.

Mora (2015), em seu trabalho, dividiu-os em quatro grandes grupos: modelos não segmentados, modelos segmentados, modelos de forma variável e outros modelos, tais como as funções splines cúbicas, modelagem de efeito misto e modelagem multivariada que utiliza a técnica de análise de componentes principais.

#### **Modelagem mista**

Um modelo matemático deseja explicar as observações de uma variável dependente por meio dos efeitos que se atribuem a outra série de variáveis independentes. Esses efeitos podem ser de natureza fixa ou aleatória, conforme representem, respectivamente, constantes a serem estimadas ou realizações de uma variável aleatória com distribuição de probabilidade conhecida (CAMARILHA FILHO, 2002).

A modelagem mista é uma técnica caracterizada quando o modelo apresenta tanto efeitos aleatórios como fixos (SEARLE, 1987). Podendo o mesmo ser linear ou não linear, dependendo do objetivo do estudo.

Recentemente empregados na área florestal, com pioneirismo para Lappi (1991), os modelos de efeitos mistos, segundo Carvalho (2013), são umas das técnicas de regressão mais sofisticadas, tanto para relações empíricas lineares como para não lineares. Os quais possibilitam ao usuário trabalhar com os dados na sua perfeita originalidade sem a necessidade de transformar variáveis para atender as pressuposições básicas de análise de regressão que são: independência entre as observações, distribuição aleatória, normal e idêntica dos resíduos com média zero e variância constante. Com os modelos de efeitos mistos são possíveis generalizar estruturas de correlações espaço-temporais, variâncias não constantes, além de permitir generalizações de famílias de distribuições de probabilidade.

De acordo com Schabenberger e Pierce (2002), esta técnica deve ser utilizada quando se tem um conjunto de dados que está agrupado ou que de outra forma necessita da inclusão de efeitos aleatórios que não têm necessariamente uma função linear média. Os modelos de efeitos mistos contêm parâmetros de efeitos fixos que são comuns a todas as árvores da amostra e os parâmetros de efeitos aleatórios que são específicos para cada árvore individual (CAO; WANG, 2011).

Os modelos lineares mistos apresentam três aspectos fundamentais: estimação e teste de hipóteses sobre os parâmetros de efeito fixo, predição dos parâmetros de efeito aleatório e estimação dos componentes de variância (PERRI et al., 1999). Segundo Camarinha Filho (2002), o sucesso do procedimento de modelagem está fortemente associado ao exame dos efeitos aleatórios e à possibilidade de se introduzir, no modelo, estruturas de variâncias e covariâncias.

Essa técnica pode ser subdividida no uso de modelos não lineares de efeitos mistos aplicados quando funções não lineares médias são aplicadas a dados

agrupados; ou modelos lineares generalizados mistos aplicados quando os dados agrupados são modelados de forma que a resposta (condicional) tem uma distribuição na família das exponenciais (SCHABENBERGER; PIERCE, 2002). Ambos os modelos são usados com dados agrupados e têm a mesma finalidade: descrever uma variável resposta em função de covariáveis, conhecendo a correlação entre as observações no mesmo grupo. Os efeitos aleatórios são usados para representar dependência dentro do grupo, tanto na técnica nlme e lme, e as suposições sobre os efeitos aleatórios e os erros dentro do grupo são idênticos nas duas modelagens (PINHEIRO; BATES, 2000).

Modelos de efeitos mistos não lineares estendem o estudo dos modelos lineares de efeitos mistos, permitindo que a função de regressão dependa não linearmente dos efeitos fixos e aleatórios. Devido à sua maior flexibilidade, a modelagem não-linear mista é geralmente mais interpretável e parcimoniosa do que a modelagem lme concorrente na forma empírica, por exemplo, uma função polinomial. Além disso, as previsões obtidas a partir das funções não-lineares são mais confiáveis fora do intervalo observado dos dados (PINHEIRO; BATES, 2000).

A escolha da melhor estrutura da matriz de covariâncias visa obter uma estrutura parcimoniosa, que explique bem a variabilidade dos dados nas diversas ocasiões e a correlação entre essas medidas, com um número pequeno de parâmetros, o que pode melhorar a eficiência das inferências feitas sobre os parâmetros do modelo proposto para os valores médios nas diversas ocasiões (BARBOSA, 2009).

Os modelos de efeitos fixos geralmente resultam em piores estimativas em relação aos modelos de efeitos mistos quando o objetivo é fazer inferências sobre a população. Além disso, modelos de efeitos mistos permitem ao usuário calibrar o modelo para um sítio específico, para plantios, espécies, parcelas ou árvores. Devido a isso, muitas vezes os modelos de efeitos mistos devam ser usados como tipo de modelo básico na modelagem de crescimento e produção florestal (BIGING, 1985; GREGOIRE, 1987; LAPPI, 1986).

A modelagem de afilamento vem sendo realizada tanto com efeitos fixos quanto efeitos mistos (CAO; WANG, 2011). Várias vantagens conferem um interesse especial para a abordagem de efeitos mistos: (i) a capacidade de levar em conta a correlação devido à estrutura de dados agrupados (várias medições em uma árvore), levando à inferência imparcial, (ii) a capacidade de separar a variância total entre e dentro de árvores considerando o efeito árvores, e, (iii) a possibilidade de calibrar o modelo para cada árvore (LAPPI, 1986; PINHEIRO; BATES, 2002).

Portanto, as modelagens de efeitos mistos permitem tanto modelos específicos da população como modelos específicos em nível de árvore. Um modelo específico da população considera os parâmetros de efeitos fixos somente e um modelo específico ao nível de árvore considera os parâmetros de efeitos fixos e aleatórios (LEITES; ROBINSON, 2004; TRINCADO et al., 2007).

Logo, os parâmetros de efeitos fixos são uma resposta média da população comum a todas as árvores e os parâmetros de efeitos aleatórios são uma resposta específica para cada árvore (SHARMA; PARTON, 2009).

Dentre as mais diversas abordagens na ciência florestal, Carvalho (2013) destacou a aplicação dos modelos mistos e não lineares em trabalhos de modelagem do crescimento e da produção florestal, ajustes de relações hipsométricas e modelagem de afilamento de tronco, tais como: Lappi e Malinen (1994); Gregoire et al. (1995); Fang e Bailey (2001); Hall e Bailey (2001); Calegario (2002); Calegario et al. (2005); Nothdurft et al. (2006); Trincado et al. (2007); Meng et al. (2008); Vargas-Larreta et al. (2009); Garber e Maguire (2003). Trincado e Burkhart (2006), por exemplo, trabalharam o modelo segmento de Max e Burkhart para avaliar o perfil do fuste em *Pinus taeda* adicionando uma estrutura de variância relativa às alturas, considerando o efeito de cada árvore como um componente aleatório ao modelo. Assim, encontraram um modelo com maior nível de representação, como: sítio, espaçamento, desbaste e regiões.

Já Mora (2015) enfatizou que a modelagem não linear de efeitos mistos para afilamento das árvores são relativamente recente na Engenharia Florestal, com tais trabalhos: Gregoire e Schabenberger (1996); Tasissa e Burkhart (1998); Valentine e Gregoire (2001); Garber e Maguire (2003); Leites e Robinson (2004); Trincado e Burkhart (2006); Meng e Huang (2009); Sharma e Parton (2009); Yang et al. (2009); Özçelik et al. (2011); Cao e Wang (2011). Esses estudos, de forma geral, demonstraram a utilização dessa técnica aplicada às funções de afilamento de maneira a estudar a interação das variáveis dendrométricas mensuradas nas seções da mesma árvore e entre as árvores do conjunto estudado.

No Brasil, essa metodologia ainda é bastante recente e há relativamente poucos trabalhos que exploram a modelagem linear e não linear mista. Calegario et al. (2005) avaliaram a modelagem do crescimento de povoamentos clonais de *Eucalyptus*, com base em modelos lineares mistos em multiníveis. Nesse, foram utilizados dois níveis aleatórios de modelagem: unidades amostrais e árvores individuais dentro das unidades amostrais. Como resultados, verificaram que as estimativas dos parâmetros foram melhoradas significativamente com a técnica.

Pires e Calegario (2007), comparando alguns modelos não lineares com lineares para estudo do taper, encontraram que o modelo não linear Logístico foi melhor, devido ao comportamento dos dados ser não linear, além da baixa correlação entre os parâmetros e à fácil interpretação deles, facilitando a convergência e o ajuste.

Horle et al. (2010) verificaram a precisão de um modelo linear, polinômio do 5º grau, e de um modelo não linear, logístico, na estimativa do perfil do fuste de *Pinus oocarpa*. Esses puderam comprovar que o modelo logístico se apresentou mais preciso na estimativa do perfil do fuste.

Mendonça (2010) testou aplicação de modelos não lineares mistos em modelos hipsométricos, de crescimento e produção e também para determinação dos

sortimentos florestais. De forma geral, também a técnica da modelagem não linear mista obteve melhores previsões.

Vismara (2013) realizou a calibração de um modelo linear misto univariado e bivariado na previsão do volume em *Eucalyptus* sp., e percebeu que essa técnica fornece previsões mais confiáveis que os modelos tradicionais de efeito fixo apenas. Esse mesmo autor aplicou para previsão de biomassa de espécies nativas da Floresta Ombrófila Densa no estado de São Paulo.

Carvalho et al. (2014) avaliaram a qualidade do modelo logístico em uma função de afilamento para estimar o volume individual de *Eucalyptus* sp. por meio de modelos não lineares de efeitos mistos em diferentes classes de idades e diâmetro. Esses autores constataram que o erro padrão reduziu em 40%, a precisão dos ajustes aumentou em 1,3% e o gráfico de resíduos tiveram melhorias significativas.

Mora (2015) verificou os efeitos da modelagem de efeitos mistos para taper em *Pinus taeda* e *Eucalyptus saligna* no estado do Paraná. O autor mostrou que apenas o uso de um coeficiente aleatório já melhora as estimativas, principalmente na parte média e apical do fuste. De forma geral, constatou-se que a modelagem não linear mista melhora as estimativas das variáveis preditas.

### Modelagem multivariada

A utilização de outros métodos estatísticos, tais como as técnicas de análise multivariada, ainda é muito incipiente. Entretanto, algumas abordagens aplicando a análise de componentes principais já existem. Fries e Matern (1966) e Guimarães e Leite (1992) a utilizaram para investigar as variações na estrutura dos dados e, assim, definir o modelo de regressão mais adequado para descrever o perfil das árvores.

Logo, com o aprimoramento das técnicas computacionais aplicadas à análise estatística estimulou o desenvolvimento deste tema. O crescente interesse pela utilização de funções de densidade probabilísticas multivariadas para descrever a distribuição de frequência simultânea das principais variáveis biométricas mensuradas nas florestas (DAP, altura e volume), tendo em vista a necessidade de análises mais robustas e informativas a respeito dos padrões estruturais da florestal visando à compreensão do seu potencial produtivo e econômico (SENA, 2011).

Nesse contexto, Uusitalo e Kivinen (1998) desenvolveram um modelo de distribuição bivariado para o DAP e altura de inserção do primeiro galho morto, a fim de avaliar a relação entre o tamanho dos indivíduos e a qualidade das toras.

Outros trabalhos nessa temática na área florestal também foram desenvolvidos, como de Li et al. (2002), Rupsys e Petrauskas (2010), Tewari e Gadow (1999), Wang e Rennolls (2007) e Zucchini et al. (2001), que de forma geral estimularam o desenvolvimento de um método de previsão probabilística dos sortimentos, a partir da distribuição normal bivariada (Sbb Johnson, Beta Generalizada, Lognormal e Gompertz) pelo método da máxima verossimilhança para modelar a densidade conjunta do DAP e altura (h).

A aplicação de distribuições multivariadas em povoamentos florestais foi também contemplada por Wang et al. (2008) que construíram um modelo bivariado para o DAP e a altura a partir do uso de copula. Logo, Wang et al. (2010) utilizaram a mesma técnica para desenvolver um modelo trivariado para o DAP, altura (h) e volume (v) de modo a estimar o volume individual.

Sena (2011) propôs a adequação da distribuição normal bivariada para modelar a densidade conjunta dos diâmetros à várias alturas do fuste e estimar os sortimentos. Assim, a autora verificou que a função normal bivariada foi inadequada, pois de modo geral, subestimou o número de toras na base e na porção média das árvores nas menores classes diamétricas e superestimou nas porções mais elevadas dos fustes e nas classes diamétricas maiores. Os principais fatores que podem estar associados ao mau desempenho desta distribuição bivariada são a ineficiência da equação de Box-Cox para normalização dos dados e a existência de correlação entre os diâmetros e as alturas mensurados em cada planta. Recomendando-se avaliar outras funções bivariadas, como Weibull e Gamma, que já possuem grande aplicação florestal pela sua maior agilidade e facilidade nas estimativas dos múltiplos produtos florestais.

Vismara (2013) aplicou um sistema multivariado constituído por equações volumétricas em duas rotações de eucalipto no estado de São Paulo por acreditar-se no potencial que a abordagem possui para melhorar as previsões e reduzir esforços de medição. Nesse estudo o autor verificou que a aplicação do sistema de modelos mistos bivariados apresentou resultados muito satisfatórios. Afirmou também que a técnica pode reduzir significativamente os esforços de medição para cubagem numa segunda rotação.

### CONCLUSÕES

As técnicas de modelagem para descrever o afilamento do fuste das árvores no Brasil vêm crescendo e se aprimorando nos últimos anos. A facilidade à informática resulta na melhoria dos resultados das estimativas dos levantamentos florestais com a diminuição dos custos, minimização dos erros amostrais e por consequência, na melhoria das estimativas dos sortimentos florestais. Esses métodos estatísticos já demonstram bons resultados e assim, corroboram para serem ainda explorados e contribuir para as decisões do planejador florestal.

### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AHRENS, S.; HOLBERT, D. Uma função para forma de tronco e volume de *Pinus taeda* L. In: **Boletim de pesquisa florestal, unidade regional de pesquisa florestal Centro-Sul**. Embrapa, 03, 1981. p.37-68.
- ANDRADE, V.C.L. **Um método para descrever o perfil do tronco em árvores de eucalipto utilizando geometria analítica**. 2001. 74f. Dissertação (Mestrado em Ciência Florestal) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2001.
- ANDRADE, V.C.L. Modelos de taper do tipo expoente-forma para descrever o perfil do fuste de árvores. **Pesquisa Florestal Brasileira**, Colombo, v.34, n.80, p.271-283, out./dez. 2014.
- ARCE, J.E. **Um sistema de análise, simulação e otimização do sortimento florestal em função da demanda por multiprodutos e**

- dos custos de transporte. 2000. 129f. Tese (Doutorado em Ciências Florestais) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2000.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE PAPEL E CELULOSE - BRACELPA. *Pinus*. 2014. Disponível em: <<http://bracelpa.org.br/bra2/?q=node/137>>. Acesso em: 22 set. 2014.
- AVERY, T.E.; BURKHART, H.E. **Forest measurements**. 4.ed. New York: McGraw-Hill, 1997. 408p. (McGraw-Hill series in forest resources).
- BARBOSA, M. **Uma abordagem para análise de dados com medidas repetidas utilizando modelos lineares mistos**. 2009. 118f. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agronômica) - Universidade de São Paulo, Piracicaba, 2009.
- BATISTA, J.L.F.; COUTO, H.T.Z.; SILVA FILHO, D.F. **Quantificação de recursos florestais: árvores, arvoredos e florestas**. São Paulo: Oficina de Textos, 2014.
- BEHRE, C.E. Preliminary notes on studies of tree form. **Journal of Forestry**, v.21, p.507-511, 1923.
- BIGING, G.S. Improved estimates of site index curves using a varying-parameter model. **Forest Science**, Washington, v.31, n.1, p.248-257, 1985.
- BORGES, J.F. **Seccionamento, do fuste de *Pinus taeda* L. para obtenção do volume de madeira serrada, através da função de forma polinomial**. 1981. 81f. Dissertação (Mestrado em Ciências Florestais) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1981.
- CAMARINHO FILHO J.A. **Modelos lineares mistos: estruturas de matrizes de variâncias e covariâncias e seleção de modelos**. 2002. 85p. Tese (Doutorado em Estatística e Experimentação agrônômica) - Universidade de São Paulo, Piracicaba, 2002.
- CAMPOS, J.C.C.; LEITE, H.G. **Mensuração Florestal: perguntas e respostas**. 3.ed. Viçosa: UFV, 2009.
- CANCINO, J. **Dendrometria Básica**. Dirección de Docencia. Universidad de Concepción, 2006. 171p.
- CAO, Q.V.; WANG, J. Calibrating fixed- and mixed-effects taper equations. **Forest Ecology and Management**, Amsterdã, v.262, n.4, p.671-673, 2011.
- CARVALHO, S.P.C.; RODRIGUEZ, L.C.E.; CALEGARIO, N.; SAVIAN, T.V.; LIMA, M.P.; SILVA, C.A.; MENDONÇA, A.R.; NICOLETTI, M.F. Modelagem não linear mista para descrever o afilamento de árvores clonais de *Eucalyptus* sp. **Scientia Forestalis** (IPEF), v.42, p.100, 2014.
- CARVALHO, S.P.C. **Estimativa volumétrica por modelo misto e tecnologia laser aerotransportado em plantios clonais de *Eucalyptus* sp.** 2013. 104f. Tese (Doutorado em Recursos Florestais) - Universidade de São Paulo, Piracicaba, 2013.
- DEMAERSCHALK, J.P. Converting volume equations to compatible taper equations. **Forest Science**, Washington, v.18, n.3, p.241-245, 1972.
- FOOD AND AGRICULTURE ORGANIZATION OF THE UNITED NATIONS - FAO. **Manual of forest inventory, with special reference to mixed tropical forest**. Roma, 1973. 200p.
- FIGUEIREDO FILHO, A. **Influência da resinagem no crescimento de *Pinus elliotii* Engelm. var. *elliotii* e sua avaliação econômica**. 1991. 138f. Tese (Doutorado em Engenharia Florestal) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1991.
- FIGUEIREDO FILHO, A.; RETSLAFF, F.A.S.; KOHLER, S.V.; BECKER, M.; BRANDES, D. Efeito da idade no afilamento e sortimento em povoamentos de *Araucaria angustifolia*. **Revista Floresta e Ambiente**, v.22, p.50-59, 2015.
- FINGER, C.A.G.; ZANON, M.L.B.; SCHNEIDER, P.R.; KLEIN, J.E.M.; COELHO, M.C.B. Funções de forma para *Eucalyptus dunnii* Maiden implantados na depressão central e encosta sudoeste do Rio Grande do Sul. **Ciência Rural**, Santa Maria, v.25, n.3, p.399-403, 1995.
- FISCHER, F.; SCOLFORO, J.R.; ACERBI JUNIOR, F.W.; MELLO, J.M.; MAESTRI, R. Exatidão dos modelos polinomiais não-segmentados e das razões entre volumes para representar o perfil do tronco de *Pinus taeda*. **Ciência Florestal**, Santa Maria, v.11, n.1, p.167-188, 2001.
- FRIEDL, R.A. **Dinâmica e prognose na forma dos fustes em povoamentos plantados de *Araucaria angustifolia* (Bert.) O. Ktze**. 1989. 167f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Florestal) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1989.
- FRIES, F.; MATERN, B. On the use of multivariate methods for the construction of tree taper curves. In: IUFRO ADVISORY GROUP OF FOREST STATISTICIANS, 1965, Stockholm. **Proceedings of Conference in Stockholm**. Stockholm: IUFRO, 1966. p.85-117.
- GOMES, A.M.A. **Medição dos arvoredos**. Lisboa: Livraria Sá da Costa, 1957. 413p.
- GONÇALVES, J.L.M.; BENEDETTI, V. **Forest nutrition and fertilization**. Piracicaba: IPEF, 2000. 421p.
- GREGOIRE, T.G. Generalized error structure for forestry yield models. **Forest Science**, Washington, v.33, n.2, p.423-444, 1987.
- GUIMARÃES, D.P.; LEITE, H.G. Um novo modelo para descrever o perfil do tronco. **Revista Árvore**, v.16, n.2, p.170-180, 1992.
- HOSOKAWA, R.T. **Betriebswirtschaftliche Kriterien zur Wahl der Umtriebszeit von *Araucaria angustifolia* (Bert.) Q. Ktze. in Brasilien**. 1976. 255f. Tese (Doutorado) - Albert-Ludwigs Universität, Freiburg, 1976.
- HRADETZKY, J. **Analyse und interpretation statistischer abränger keisen**. (Biometrische Beiträge zu aktuellen forschuns projekten). Baden: Württemberg Mitteilungen der FVA, 1976. 146p.
- INDÚSTRIA BRASILEIRA DE ÁRVORES - IBÁ. **Anuário Estatístico 2015**. Disponível em: <<http://www.iba.org/>>. Acesso em: 14 ago. 2015.
- KOHLER, S.V.; KOEHLER, H.S.; FIGUEIREDO FILHO, A. Modelos de afilamento para *Pinus taeda* por classes de idade. **Revista Floresta e Ambiente**, p.470-479, 2013.
- KOZAK, A. A variable exponent taper equation. **Canadian Journal of Forest Research**, Ottawa, v.18, n.11, p.1363-1368, 1988.
- KOZAK, A. My last words on taper equations. **Forestry Chronicle**, Mattawa, v.80, n.4, p.507-515, 2004.
- KOZAK, A.; MUNRO D.D.; SMITH J.H.G. Taper functions and their application in forest inventory. **Forestry Chronicle**, Ottawa, v.45, n.4, p.278-283, 1969.
- LAPPI, J. Calibration of height and volume equations with random parameters. **Forest Science**, Lawrence, v.37, n.3, p.781-801, 1991.
- LAPPI, J. Mixed linear models for analyzing and predicting stem form variation of Scots pine. **Communications Instituti Forestalis Fenniae**, v.134, p.1-69, 1986.
- LARSON, P.R. Stem form development of forest tree. **Forest Science Monograph**, Washington, p.1-41, 1963.
- LEITES, L.P.; ROBINSON, A.P. Improving taper equations of Loblolly Pine with crown dimensions in a mixed-effects modeling framework. **Forest Science**, Washington, v.50, n.2, p.204-212, 2004.
- LI, F.; ZHANG, L.; DAVIS, C.J. Modeling the joint distribution of tree diameters and heights by bivariate generalized beta distribution. **Forest Science**, v.48, n.1, p.47-58, fev. 2002.
- MACHADO, A.L.F. **Métodos usuais e propostos para expressar perfis dendrométricos e determinar volumes individuais**. 2009. 189f. Tese (Doutorado em Engenharia Florestal) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.
- MACHADO, S.A.; FIGUEIREDO FILHO, A. **Dendrometria**. 2.ed. Guarapuava: Unicentro, 2006. 316p.
- MAX, T.A.; BURKHART, H.E. Segmented polynomial regression applied to taper equations. **Forest Science**, Washington, v.22, n.3, p.283-289, 1976.
- MENDONÇA, A.R. **Modelagem não linear do crescimento e da produção de plantações florestais**. 2010. 84p. Tese (Doutorado em Engenharia Florestal) – Universidade Federal de Lavras, Lavras, MG. 2010.
- MORA, R. **Funções de afilamento de forma variável e modelagem de efeitos mistos em fustes de *Pinus taeda* e *Eucalyptus saligna***. 2015. 277 f. Tese (Doutorado em Engenharia Florestal) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2015.
- NEWBERRY, J.; BURKHART, H.E. Variable-form stem profile models for Loblolly Pine. **Canadian Journal of Forest Research**, Ottawa, v.16, n.1, p.109-114, 1986.
- NEWHAM, R.M. **A variable-form taper function**. Canadian Forestry Service Petawawa Natl. For. Inst. Inf. Rep. PI-X-83., 1988. 31p.
- NEWHAM, R.M. Variable-form taper functions for four Alberta tree species. **Canadian Journal of Forest Research**, Ottawa, v.22, n.2, p.210-223, 1992.
- ORMEROD, D.W. A simple bole model. **Forestry Chronicle**, Ottawa, v.49, n.3, p.136-138, 1973.
- PERRI, S.H.V.; IEMMA, A.F. Procedure of software SAS® for the analysis of mixed models. **Scientia Agricola**, Piracicaba, v.56, n.4, p.959-967, 1999.
- PINHEIRO, J.C.; BATES, D.M. **Mixed-effects models in S and S-PLUS**. Springer, New York, 2000. 537p.
- PIRES, L.M.; CALEGÁRIO, N. Ajuste de modelos estocásticos lineares e não lineares para a descrição do perfil longitudinal de árvores. **Revista Árvore**, Viçosa, v.31, n.5, p.845-852, 2007.

## Descrição do perfil do fuste de árvores...

NICOLETTI, M. F. et al. (2016)

- PRODAN, M.; PETERS, R.; COX, F.; REAL, P. **Mensura forestal**. San José, Costa Rica: GTZ-IICA, 1997.
- QUEIROZ, D.; MACHADO, S.A.; FIGUEIREDO FILHO, A.; ARCE, J.E.; KOEHLER, H.S. Identidade de modelos em funções de afilamento para *Mimosa scabrella* Benth em povoamentos nativos da região metropolitana de Curitiba/PR. **Floresta**, Curitiba, v.38, n.2, abr./jun. 2008.
- ROJO, A.; PERALES, X.; SÁNCHEZ-RODRÍGUEZ, F.; GONZÁLEZ-ALVAREZ J.G.; VON GADOW, K. Stem taper functions for maritime pine (*Pinus pinaster* Ait.) in Galicia (Northwestern Spain). **European Journal of Forest Research**, Dordrecht, v.124, n.3, p.177-186, 2005.
- RUPSYS, P.; PETRAUSKAS, E. The bivariate gompertz diffusion model for tree diameter and height distribution. **Forest Science**, v.56, n.3, p.271-280, jun. 2010.
- SCHABENBERGER, O.; PIERCE, F.J. **Contemporary statistical models: for the plant and soil sciences**. 2002. 730p.
- SCHÖEPFER, W. **Automatisierung des massen, sorten and wertberechnung stenender waaldbestande schriftenreihe bad**. [S.l.]: Wurttt-Forstl., 1966.
- SCOLFORO, J.R.S.; RIOS, M.S.; OLIVEIRA, A.D.; MELLO, J.M.; MAESTRI, R. Acuracidade de equações de afilamento para representar o perfil de *Pinus elliottii*. **Revista Cerne**, Lavras, v.4, n.1, p.100-122, 1998.
- SCOLFORO, J.R.S.; FIGUEIREDO FILHO, A. **Mensuração florestal 2: volumetria**. Lavras: ESAL/FAEPE, 1993. 126p.
- SEARLE, S.R. **Linear models for unbalanced data**. New York: John Wiley, 1987. 536p.
- SENA, A.L.M. **Manejo da densidade e predição probabilística multivariada de múltiplos produtos em povoamentos florestais**. 2011. 156p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Florestal) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2011.
- SHARMA, M.; PARTON, J. Modeling stand density effects on taper for Jack Pine and Black Spruce plantations using dimensional analysis. **Forest Science**, Washington, v.55, n.3, p.268-282, 2009.
- SILVA, J.A. **Schaftkurvenuntersuchungen an fichte, tanne, potkiefer und rechkiefer**. 1976. Tese (Doutorado) - Bodenkultut Universitat, Wien, 1976.
- SOUZA, C.A.M. **Avaliação de modelos de taper não segmentados e segmentados na estimação de altura e volume comercial de fustes de *Eucalyptus* sp.** 2007. 94f. Dissertação (Mestrado em Produção Vegetal) - Universidade Federal do Espírito Santo, 2007.
- TEWARI, V.P.; GADOW, K.V. Modeling the relationship between tree diameters and heights using Sbb distribution. **Forest Ecology and Management**, v.119, n.1-3, p.171-176, jun. 1999.
- TRINCADO, G.; VANDERSCHAAF, C.L.; BURKHART, H.E. Regional mixed-effects height-diameter models for Loblolly Pine (*Pinus taeda* L.) plantations. **European Journal of Forest Research**, Dordrecht, v.126, n.2, p.253-262, 2007.
- UUSITALO, J.; KIVINEN, V.P. Constructing bivariate ddb-dead-branch height distribution of pines for use in sawing production planning. **Scandinavian Journal of Forest Research**, v.13, n.1-4, p.509-514, 1998.
- WANG, M.; RENNOLLS, K. Bivariate distribution modeling with tree diameter and height data. **Forest Science**, v.53, n.1, p.16-24, fev. 2007.
- WANG, M.; RENNOLLS, K.; TANG, S. Bivariate distribution modeling of tree diameters and heights: dependency modeling using copulas. **Forest Science**, v.54, n.3, p.284-293, jun. 2008.
- WANG, M.; UPADHYAY, A.; ZHANG L. Trivariate distribution modeling of tree diameter, height and volume. **Forest Science**, v.56, n.3, p.290-300, jun. 2010.
- ZUCCHINI, W.; SCHIMIDT, M.; GADOW, K. A model for the diameter-height distribution in an uneven-aged beech forest and a method to assess the fit of such models. **Silva Fennica**, v.35, n.2, p.169-183, 2001.