

# Uma análise construtivista de alguns paradoxos

Douglas Antonio Bassani<sup>1</sup>

**RESUMO:** Neste artigo analiso o “problema temporal” que aparece em alguns dos principais paradoxos da literatura filosófica. Verifico os motivos do surgimento de uma situação paradoxal quando termos são empregados e, sob uma perspectiva construtivista em filosofia da matemática, considero a resposta dada aos paradoxos, especialmente o de natureza lógica. O “pano-de-fundo” do artigo leva em consideração a obra “*The Physicist second Reaction to Mengenlehre*” (1934) do matemático e filósofo Percy W. Bridgman (1882-1961), onde encontramos uma excelente análise do problema.

**PALAVRAS-CHAVE:** Paradoxo; Construtivismo; Operações; Verificações; Infinito.

**ABSTRACT:** In this article I analyze the “time problem” that appears in some of the main paradoxes of the philosophical literature. I verify the reasons of the appearance of a paradoxical situation when some terms are used and, under a perspective constructivist in philosophy of the mathematics, I consider the answer given to the paradoxes, especially the one of logical nature. The “pano-de-fundo” of the article takes in consideration the work “*The Physicist second Reaction to Mengenlehre*” (1934) of the mathematician and philosopher Percy W. Bridgman (1882-1961), where we found an excellent analysis of the problem.

**KEY WORDS:** Paradox; Constructivism; Operations; Verifications; Infinite.

## I- INTRODUÇÃO

O termo “paradoxo” é derivado do grego *paradoxon* que significa literalmente “contrário à opinião” ou “oposto à opinião”. Normalmente os paradoxos são conhecidos por envolverem algum tipo de circularidade nos termos empregados, em geral, é uma forma disfarçada de auto-referência. A auto-referência é entendida como um sistema se referindo a ele próprio, falando dele próprio, fatalmente esta situação conduz a um paradoxo.

Um paradoxo lógico consiste na derivação no sistema lógico de uma afirmação com a estrutura (j e Øj). Os paradoxos são também conhecidos como antinomias, e “*Uma antinomia causa uma surpresa que não pode ser acomodada a não ser com o repúdio de parte da nossa herança conceitual*” (QUINE, 1966, p. 9). F. P. Ramsey<sup>2</sup> (1903-1930) apresenta uma boa classificação dos paradoxos, estruturalmente caracterizados como paradoxos lógicos e paradoxos semânticos. Com exceção do paradoxo de Russell, os demais paradoxos deste artigo são paradoxos de natureza semântica.

Historicamente, Zenão de Eléia (490-425 a.C.) é bem conhecido por causa de seus paradoxos, o mais famoso deles é o de Aquiles e a tartaruga, um evidente paradoxo sobre a impossibilidade de divisão do tempo. Zenão escreveu um livro que continha em torno de 40 paradoxos, porém, acabou se perdendo<sup>3</sup>. Alguns importantes paradoxos aparecem também em Aristóteles (384-322 a.C.), conhecidos como paradoxos do movimento, expostos principalmente em sua Física, livro VI. Além desses, uma série de outros paradoxos podem ser encontrados em diversos textos de lógica ou de filosofia das ciências formais. Uma interessante versão de alguns paradoxos também pode ser encontrada em Smullyan (1998).

Os paradoxos foram importantes especialmente para os lógicos e matemáticos. Tão sérios que acabaram gerando uma “crise” nos fundamentos da matemática no início do século XIX, dando a entender que a matemática precisava de fundamentos sólidos, bases seguras. Os paradoxos ameaçaram demonstrar que a matemática era inconsistente com a lógica. Três grandes escolas surgiram na tentativa de solucionar a “crise” dos fundamentos da matemática, a saber, o Logicismo, o Intuicionismo e o Formalismo. Em linhas gerais, os principais representantes destas escolas são, respectivamente, Gottlob Frege (1848-1925), Luitzen E. J. Brouwer (1881-1966) e David Hilbert (1862-1943). De forma bastante resumida, podemos dizer das três escolas o seguinte: Frege pensava em fundamentar a matemática na lógica. Para isso, criou uma lógica própria, uma variante do cálculo de

predicados, encontrada nos principais livros de lógica. Já Brouwer, pensava em fundamentar a matemática numa forma de intuição a priori (um pouco a maneira de Kant). A matemática era caracterizada pelo intuicionismo como construções mentais intuitivas. O formalismo de Hilbert sustentava que os fundamentos da matemática deveriam ser buscados no interior dela própria, ou seja, esta era uma tentativa de demonstrar a consistência interna da aritmética. Não é objetivo deste artigo tratar especificamente sobre estas três escolas, senão por outros motivos, simplesmente pela limitação espacial. Tratarei apenas sobre o problema dos paradoxos, um pouco anterior ao surgimento das escolas e que foi a “pedra-de-toque” para o surgimento delas. Começarei com o famoso paradoxo de Russell, um exemplo claro de um paradoxo de natureza lógica.

## 2- COMO EVITAR SITUAÇÕES PARADOXAIS?

O paradoxo de Russell foi formulado por Bertrand Russell (1872-1970) dirigido à lógica de Frege. Frege desenvolveu boa parte da teoria dos conjuntos baseado no seguinte axioma: “dada qualquer propriedade, existe o conjunto de todas as coisas que têm esta propriedade”. Assim, propriedades como “pessoas nesta sala”, “professores da Universidade”, etc., formam um conjunto de pessoas, cujos elementos satisfazem a propriedade específica. O mesmo ocorre com qualquer outra propriedade que possamos pensar. Isto é o que diz o axioma de Frege. A princípio, parece se tratar de um axioma evidente, porém, não para Russell. Para ele, o axioma pode conduzir a paradoxos na teoria de conjuntos, portanto, devemos abandoná-lo.

O paradoxo ocorre quando pensamos na seguinte propriedade “o conjunto dos conjuntos que não se pertencem a si mesmos”. Naturalmente, o conjunto das “pessoas desta sala” é um conjunto que satisfaz a propriedade acima, pois forma um conjunto, o qual não se pertence a si mesmo, isto é, o conjunto das pessoas desta sala não é um elemento de si mesmo. Ora, chamemos de  $R$  o conjunto definido pela propriedade “o conjunto dos elementos que não se pertencem a si mesmos”, formalmente entendido da seguinte forma:  $R = \{x \mid x \notin x\}$ . Assim, se  $x \in R$ ; se  $x \notin R$ . Até aqui não temos um paradoxo. Porém, como  $x$  é uma variável qualquer, ela pode ser substituída, por exemplo, por  $R$ . Assim, temos uma situação paradoxal, pois, se  $R \in R$ ; e, se  $R \notin R$ . Isto evidencia um claro paradoxo de natureza lógica! Como disse, este é um paradoxo identificado por

Russell na lógica de Frege, na tentativa de demonstrar que a lógica de Frege permitia gerar inconsistências como, por exemplo, afirmar algo e negar ao mesmo tempo - ( $j$  e  $\emptyset j$ ) - exatamente como aparece no paradoxo. Portanto, conclui Russell, a matemática não poderia ser fundamentada nesta lógica, pois dispor de uma lógica inconsistente significa dispor de uma matemática também inconsistente, algo inconcebível a lógicos e matemáticos. O próprio Frege reconheceu o paradoxo em sua lógica, porém, apesar de ter feito alguns melhoramentos, não conseguiu resolver o problema. Mais tarde, o próprio Russell deu uma versão melhorada da proposta de Frege (uma solução demasiadamente ampla para ser tratada neste artigo).

Vejamos como o operacionalismo de Bridgman (1934) (uma versão construtivista ou anti-realista em filosofia da matemática) contornaria o problema do paradoxo do Russell. Para Bridgman, o problema reside na falta de significado operacional da afirmação "*x é um conjunto que contém x como seu elemento*" (esta afirmação é uma instância da propriedade "o conjunto dos conjuntos que não se pertencem a si mesmos"). Operacionalmente, a variável  $x$  não pode envolver nenhum conjunto de natureza finita, pois não existem conjuntos finitos que contenham eles próprios como seus elementos. Particularmente, o conjunto formado pela propriedade "pessoas nesta sala" não pertence a ele próprio, isto é, não é um elemento dele mesmo, especialmente por ser um conjunto. Aliás, a teoria dos conjuntos de Cantor exclui a relação de "pertinência" ( $\hat{I}$ ) feita entre conjuntos, pois esta relação exige que seja feita entre *elementos* e conjuntos. Apenas a relação de "continência" ( $\hat{I}$ ) é aplicada aos conjuntos.

Interessantemente, os operacionalistas consideram que se a propriedade em questão não puder ser aplicada aos conjuntos finitos, ela simplesmente não pode ser aplicada a conjunto nenhum. Automaticamente podemos nos perguntar: a propriedade "o conjunto dos conjuntos que não se pertencem a si mesmos" poderia ou não ser aplicada aos conjuntos infinitos? Para os operacionalistas (e para a maioria dos construtivistas em filosofia da matemática), conjuntos infinitos simplesmente *não existem*, portanto é uma propriedade que não se aplica a nada. Assim, a afirmação "*x é um conjunto que contém x como seu elemento*" simplesmente não tem significado operacional. Isto quer dizer que exatamente a propriedade que gera o paradoxo na lógica de Frege simplesmente não pode existir para o operacionalismo, porque é uma afirmação que não tem significado operacional. Com efeito, os operacionalistas admitem que desaparecem os paradoxos da matemática quando verificamos operacionalmente os conceitos. Para Bridgman

Não é possível dar um procedimento operacional direto para decidir se um conjunto inclui ele próprio como seu elemento ou não. Temos visto que situações paradoxais são esperadas sempre que uma operação for considerada como completada, isto é, em termos de suas propriedades (BRIDGMAN, 1934, p. 230).

Suspeito que o paraíso matemático que Hilbert afirma ter sido aberto por Cantor está situado neste domínio e que as condições para entrar neste paraíso é admitir de boa vontade os paradoxos (BRIDGMAN, 1934, p. 110).

A questão agora é saber *porque* os conjuntos infinitos não existem na matemática pensada pelos construtivistas em filosofia da matemática. Vejamos alguns detalhes da resposta.

O construtivismo (ou também anti-realismo) em filosofia da matemática considera que um conjunto existe apenas quando *todos* os seus elementos puderem, de alguma forma, ser construídos. Se os conjuntos são empíricos, a construção dos elementos envolve uma experiência ou observação de que eles satisfazem as propriedades desejadas. Esta experiência poderia ser através de experimentos físicos de laboratório, por exemplo, no caso de se tratar de fenômenos quânticos. No caso de conjuntos matemáticos, os construtivistas consideram que os algoritmos são bons procedimentos para a construção dos elementos do conjunto, pois permitem experimentar diretamente se os elementos satisfazem ou não a propriedade desejada. Porém, os algoritmos jamais construirão conjuntos infinitos *atuais*, isto é, totalidades *completadas*, pois estes conjuntos, automaticamente, requerem um tempo *infinito* para a computação de todos os elementos, um tempo inexistente para os construtivistas. Nos termos de Bridgman

A razão do fracasso de uma operação proposta ao aplicá-la a uma classe infinita foi o fato dela ter se encontrado, neste caso, com limitações impostas pelo caráter necessariamente temporal de toda atividade, de modo que se houvéssimos sido o suficientemente perspicazes para ver o que aconteceria, não esperaríamos, em princípio, a obtenção do êxito (BRIDGMAN, [1936] 1948, p. 78).

Alguns construtivistas, como Brouwer, aceitam a existência apenas de conjuntos infinitos *potenciais* no interior da matemática, ou seja, não são conjuntos infinitos acabados, mas sim, conjuntos infinitos sempre abertos à possibilidade de introdução de novos elementos. As conseqüências em relação à noção de "verdade matemática" são imediatas, como vemos nas citações de Brouwer e de Bridgman

O critério de verdade ou falsidade de uma afirmação da matemática foi confinada à própria atividade matemática. Uma consequência imediata foi que nenhuma verdade pode ser reconhecida na matemática se não tiver sido experienciada (BROUWER, *Collected Works*, 1975, p. 551).

Indubitavelmente, esta conclusão poderá parecer menos satisfatória, pois apresenta a verdade como algo não absoluto, mas ao contrário, dependente neste caso do grau à que chega a destreza matemática do homem em cada momento (BRIDGMAN, [1936] 1948, p. 77).

Aceitar conjuntos infinitos apenas potencialmente acabou resolvendo muitos problemas na matemática, pois se tornou uma concepção menos radical do que os operacionalistas por exemplo, os quais não aceitam a existência de tais conjuntos. Porém, de maneira geral, os construtivistas são também anti-realistas em filosofia da matemática, contrários as teses defendidas pelos realistas em filosofia da matemática, pois para estes, os conjuntos infinitos atuais, além de existirem na matemática, são perfeitamente justificados. Para os realistas, o fato de podermos ou não construir conjuntos infinitos não é uma questão interessante, pois, ao contrário dos construtivistas, a pergunta pela construção ou não dos conjuntos não é interessante. Estes conjuntos existem independentemente de qualquer construção humana e de qualquer procedimento de demonstração. Os realistas em filosofia da matemática normalmente são também platonistas, isto é, acreditando na existência de tais conjuntos no universo platônico.

É bastante razoável (inclusive para pessoas não especializadas na área) que se alguém afirma que algo pode ser verificado, porém, considera o “sutil” fato de que esta verificação exige um tempo infinito para ser levada a cabo, não resta outra alternativa a não ser recuarmos, por considerarmos que uma verificação infinita simplesmente não pode ser feita sequer por um computador ultra-avançado. É exatamente isto que pensam os anti-realistas sobre esta questão.

Particularmente, Bridgman (1934) considera que os conjuntos infinitos atuais são introduzidos quando definimos os conjuntos através *propriedades* que eles apresentam, ao invés de definí-los através de procedimentos *diretos*, como utilizando algoritmos ou outros procedimentos de computação. Os construtivistas entendem que uma definição pelas propriedades permite introduzir conjuntos infinitos atuais na matemática. Como seria uma definição pelas propriedades? O exemplo mais comum é a definição do próprio conceito “conjunto”. Definir “conjunto” pelas propriedades seria admitir que temos um conjunto quando temos “*um*

*agregado de todos os elementos que satisfazem uma determinada propriedade*". Ora, um conjunto infinito pode ser perfeitamente definido desta forma, pois é consistente com uma definição pelas propriedades. Por exemplo, o conjunto infinito dos números naturais poderia ser definido como "o agregado de todos os elementos maiores ou iguais a zero". Para os construtivistas, o problema com este tipo de definição é que não é uma forma de definição direta, uma forma que possibilite a verificação através de algum procedimento de demonstração, pois neste caso, acreditam os construtivistas, eliminamos os paradoxos na matemática. Com efeito, se um conjunto (como a seqüência infinita dos números) for entendido como uma totalidade aberta, o que é passível de ser verificado através de algoritmos, a introdução do conjunto é perfeitamente justificada para os construtivistas.

Há também uma versão mais popular do paradoxo de Russell, a saber, o famoso "paradoxo do barbeiro". Este paradoxo consiste no seguinte: o chefe de uma empresa pediu para o barbeiro (seu funcionário) que barbeasse todos aqueles funcionários que não se barbeiam a si mesmos. O paradoxo ocorre quando chega a vez do próprio barbeiro se barbear; se ele barbeia-se a si mesmo, então pertence ao grupo daqueles que barbeiam-se a si mesmos, portanto não deveria se barbear (paradoxo); se ele não barbeia-se a si mesmo, então pertence ao grupo dos que não barbeiam-se a si mesmos, portanto, deveria se barbear (novamente um paradoxo). Em qualquer uma das situações o barbeiro estaria desobedecendo às ordens de seu chefe, se encontrando diante de um paradoxo. Como evitamos este paradoxo?

Para saber como evitá-lo, precisamos antes de tudo entendê-lo. Para os construtivistas em filosofia da matemática, este paradoxo ocorre porque há um problema *temporal* envolvido na classificação entre os elementos que fazem parte de um conjunto daqueles que fazem parte do outro. O problema temporal aparece sempre que houver uma *interferência* de situações futuras na classificação feita no presente ou, o que é o mesmo, do futuro interferindo no presente. Considerando a classificação exigida ao barbeiro, ela apenas poderia ser feita caso o barbeiro verificasse nas situações passadas ou presentes, de forma tal que a ordem expressasse uma *limitação temporal*. Limitar temporalmente a ordem significa que a ordem do padrão deveria exigir que o barbeiro fizesse a classificação apenas *até o momento* em que a ordem fosse concluída. Vejamos o problema em Bridgman

É óbvio que desta forma um homem está sendo classificado como aquele que se barbeia a si mesmo se em qualquer tempo, seja no passado ou no futuro, ele se barbeia a si mesmo. Mas o futuro é impredicativo, e deve-se reconhecer que nossas

operações não devem envolver predições sobre o futuro. Isso é suficientemente evidente, entretanto, que a ordem não é propriamente executada, porque envolve uma situação operacionalmente indeterminada, e devemos estar preparados para o paradoxo (BRIDGMAN, 1934, p. III).

Neste caso, o barbeiro saberia perfeitamente bem em qual conjunto deveria ser classificado, a saber: naquele dos que se barbeiam a si mesmos, caso ele tivesse esta propriedade; ou naquele conjunto dos que não se barbeiam a si mesmos, caso este fosse o caso. O paradoxo surge porque quando a classificação está na *metade*, surge uma nova situação, a classificação dele próprio, não permitindo uma classificação atual.

Isto é o que os construtivistas entendem como uma interferência de situações futuras na classificação que está sendo feita no presente. Bridgman considera que a ordem ao barbeiro deveria ser a seguinte: classifique entre os funcionários que se barbeiam a si mesmos daqueles que não se barbeiam a si mesmos até o *momento presente*. Para operacionalistas como Bridgman sempre teremos um paradoxo quando “*Um homem está sendo classificado como aquele que se barbeia a si mesmo se, em qualquer tempo, seja no passado ou futuro, ele se barbeia a si mesmo. Mas o futuro é impredicativo*” (BRIDGMAN, 1934, pp. III-III2).

Outra forma de resolver o paradoxo do barbeiro que aparece em Smullyan (1998) considera que, dadas às circunstâncias, o suposto barbeiro não poderia existir. Para ele, a situação do paradoxo seria análoga a afirmar que um certo homem tem, *simultaneamente*, mais de dois metros de altura e menos de dois metros de altura. Uma pessoa que afirma isso está enganada ou mentindo, pois um homem assim certamente não existe. A situação do barbeiro não é diferente, porque a classificação exigida deixa o próprio barbeiro de fora, o que caracteriza a inexistência do barbeiro. Para Smullyan, o barbeiro barbeava *todos* os habitantes da cidade que não faziam a própria barba, mas *nunca* barbeava qualquer habitante que fizesse a própria barba. Ora, claramente um barbeiro assim não existe, pois a pergunta é: e o próprio barbeiro, em que conjunto está? Automaticamente, são excluídas as duas únicas possibilidades de classificar o barbeiro, semelhante ao exemplo análogo acima. Uma solução ao paradoxo que não deixa de ser interessante.

Outro paradoxo que envolve problemas temporais é o “paradoxo do mentiroso”. Este é um dos paradoxos mais antigos que se conhece e talvez o mais conhecido paradoxo da história da ciência, formulado por Epimênides de Creta (século VII a.C). Uma variante é a seguinte: “Epimênides, o cretense, diz que

todos os cretenses são mentirosos”. Se o que Epimênides diz é verdadeiro, então ele está mentindo, portanto, o que ele diz é falso (paradoxo). Se o que ele diz é falso, então ele não está mentindo, portanto, o que ele diz é verdadeiro (novamente um paradoxo). Um exemplo típico de um paradoxo lingüístico.

Bridgman (1934) considera que há um “problema temporal” envolvido na verificação da afirmação “todo cretense é mentiroso”, um problema que conduz a uma situação paradoxal. Para ele, verificar esta afirmação conduz aos seguintes efeitos: encontrar pelo menos um cretense não-mentiroso, implicaria na falsidade da afirmação (por dispormos de pelo menos um contra-exemplo); não encontrar um contra-exemplo, implica em concluir pela verdade da afirmação. Estes são os dois únicos efeitos possíveis nesta situação. O problema com o limite temporal é que quando Epimênides acaba de proferir a afirmação, uma situação nova surge, gerando o paradoxo. Esta nova situação é a seguinte: quando a verificação entre os cretenses mentirosos daqueles que não o são é iniciada, num momento *futuro*, o próprio cretense que fez a afirmação deverá ser classificado, conduzindo assim ao paradoxo. Para Bridgman, o paradoxo não ocorreria caso Epimênides tivesse dito “Todos os cretenses são mentirosos quando eu *começo* a fazer esta afirmação”, pois envolveria, neste caso, apenas uma classificação feita no presente. Assim, o paradoxo do cretense apresenta o mesmo problema que o paradoxo do barbeiro acima, qual seja, o de falta de limitação temporal.

Análises mais recentes, como a de Smullyan (1998) dão conta de que a afirmação do cretense de que “todos os cretenses são mentirosos” é ambígua e facilmente conduz ao paradoxo. Para Smullyan, a questão é saber o que o termo “mentiroso” quer dizer, ou seja, se mentiroso é alguém que mente às vezes ou alguém que mente *sempre*. Se a referência é a alguém que mente às vezes, não teríamos nenhum paradoxo, pois, apesar do cretense mentir às vezes, às vezes ele também diz à verdade. Se a referência é a alguém que *sempre* mente, também não teríamos nenhum paradoxo, pois a afirmação não pode ser verdadeira, isto é, ela apenas poderia ser falsa. Como esta é uma conclusão correta, não existe nenhum paradoxo.

Para evitar problemas como de ambigüidade, Smullyan prefere utilizar uma versão mais adequada do problema, aí sim, caindo num paradoxo. Considere a afirmação “Esta frase é falsa”. Ora, a questão é saber se a afirmação é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira, então é *fato* o que ela afirma, o que significa que na verdade é falsa, como diz a frase. Porém, isto é uma contradição clara! Por outro lado, se a frase for falsa, então o que ela diz *não* é fato, o que significa que, na

realidade, a frase não é falsa, de modo que temos novamente uma contradição, e portanto um paradoxo. Neste caso, não temos nenhuma ambigüidade, e temos realmente um paradoxo sem problemas de interpretação dos conceitos. Esta versão certamente não modificaria a análise feita pelos construtivistas, pois para estes, o problema não é de ambigüidade, mas sim, de falta de limitação temporal.

### 3- INDO UM POUCO ALÉM

Os construtivistas em filosofia da matemática estabelecem fundamentos à matemática como forma de dar uma resposta aos problemas paradoxais e de inconsistência que assolavam os filósofos do início do século XIX. Os construtivistas concluíram, de maneira geral, que a “desgraça” do infinito atual era o responsável por tais paradoxos. O problema de falta de limite temporal na verificação é justamente o problema que aparece quando for feita uma verificação (impossível) de conjuntos infinitos atuais, um problema detectado por Bridgman (como vimos acima em relação aos paradoxos), bem como, pelos demais construtivistas. Com efeito, quando Bridgman detecta que a propriedade de pertencer a si próprio somente poderia ser atribuída a conjuntos infinitos atuais, Bridgman está, na verdade, criticando o realismo em filosofia da matemática, pois apenas os realistas acreditam na existência de tais conjuntos na matemática. Para ele, aceitar estes conjuntos significa aceitar paradoxos, como vemos na seguinte citação de Bridgman

Nenhuma formulação destes paradoxos tem sido capaz de me convencer do paradoxo, mas posso ver que se eu literalmente penso numa reta como consistindo de um agregado de pontos e de um intervalo de tempo como a soma de momentos sem duração, os paradoxos se apresentarão. Os paradoxos aparecem apenas no contexto da presuposição, de uma análise inconsciente (BRIDGMAN, 1955, p. 101).

O infinito atual está por trás deste problema detectado por Bridgman, qual seja, o de conceber uma reta como um agregado de pontos. Pensam os construtivistas que nenhum procedimento de demonstração poderia ser selecionado para a construção de pontos, especialmente quando tratamos com retas infinitas, com um conjunto de pontos também infinitos. Caímos então, no mesmo problema de construção mencionado acima, como vemos na seguinte citação “*Uma linha não é composta de pontos como uma floresta é composta de árvores, não pode uma linha*

*ser produzida colocando juntos 'todos' os pontos nela"* (BRIDGMAN, 1934, p. 229). Da mesma forma "*Não faz sentido falar de números infinitos como 'existindo' no sentido Platônico, e faz menos sentido ainda falar de números infinitos de diferentes ordens de infinidade, como pensou Cantor"* (BRIDGMAN, 1955, pp. 100-101).

#### 4- CONCLUSÃO

Como conclusão, podemos dizer que o dualismo realismo X anti-realismo se tornou fundamental na análise filosófica contemporânea da matemática, especialmente depois do surgimento das três escolas de fundamentos da matemática. Este dualismo se reflete fortemente tanto em ontologia, quanto em epistemologia.

Por um lado, do ponto de vista *ontológico*, os realistas diferem dos anti-realistas por considerarem que os objetos matemáticos existem numa realidade independente do sujeito e de procedimentos de demonstração. Os realistas são platonistas em ontologia, isto significa que a realidade dos objetos matemáticos é no "reino platônico", num reino onde estão os objetos matemáticos e suas relações dadas, sem que o sujeito (o matemático) interferira de alguma forma.

Por outro lado, os anti-realistas em ontologia consideram que os objetos matemáticos existem quando estiverem acompanhados de procedimentos de demonstração, procedimentos de prova. Neste sentido, sem uma forma de verificá-los não é possível admitir a existência de tais objetos. Nos termos de Dummett (1978), os anti-realistas em filosofia da matemática são aqueles que "*substituem a noção de verdade na teoria de significado pela de verificação*". Com efeito, os construtivistas entendem que aquilo que não puder ser verificado de alguma forma, não é digno de existir no interior da matemática. Esta idéia se reflete fortemente na análise dos paradoxos acima, especialmente em relação à rejeição dos conjuntos infinitos atuais pela impossibilidade construtiva. Para os anti-realistas, é somente assim que os fundamentos da matemática estarão em bases seguras, excluindo qualquer tipo de paradoxos. A análise de Bridgman é claramente a de um anti-realista em filosofia da matemática.

Do ponto de vista *epistemológico*, os anti-realistas em filosofia da matemática acreditam que o acesso aos objetos matemáticos e suas verdades é dado pelos procedimentos de demonstração. Qualquer verdade deve ser demonstrada, isto é, acompanhada de uma forma de verificação intersubjetiva. Os realistas têm

mais dificuldades em responder a questão epistemológica. Os mais contemporâneos acreditam que temos acesso aos objetos matemáticos e suas verdades através de uma experiência do pensamento, porém, a forma como é feita esta experiencição não aparece com clareza em seus escritos, como vemos na citação de Dummett

Por um lado, se alguém acredita, como os platonistas, que conferimos significado a nossos enunciados matemáticos de tal forma que tornamos todos eles verdadeiros ou falsos de maneira categórica, independentemente de nosso conhecimento, então será natural adotar a imagem de uma realidade matemática existente, determinada por completo, independentemente de nós. Porém, por outro lado, se alguém acredita, como os intuicionistas, que o conteúdo de um enunciado matemático reside totalmente em nossa habilidade de reconhecer o que se constitui uma prova dele e o que é uma refutação, então quando não dispomos de um método efetivo de obter uma prova ou uma refutação, não temos o direito de declará-lo verdadeiro ou falso (DUMMETT, 1990, p. 32).

## NOTAS

- <sup>1</sup> Doutorando em Filosofia – IFCH – UNICAMP. Professor de Filosofia – CCHS – UNIOESTE – Campus de Toledo. E-mail: douglasbassani@uol.com.br.
- <sup>2</sup> RAMSEY, “*Foundations of mathematics and other logical essays*”, Londres, Routledge & Kegan Paul, 1965.
- <sup>3</sup> O que sabemos de Zenão foi transmitido por Platão, Aristóteles e pelo comentador Simplicio do séc. VI d.C.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BERNAYS, P. “On Platonism in Mathematics”. In P. Benacerraf and H. Putnam (eds.) *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, Cambridge, Cambridge University Press, 1983.

BRIDGMAN, P. W. *The Logic of Modern Physics*. New York, The Macmillan Company, 1927.

\_\_\_\_\_. *The Nature of Physical Theory*. Princeton, Princeton University Press, 1936.

\_\_\_\_\_. “A Physicist’s Second Reaction to Mengenlehre”. In *Scripta Mathematica*, I, pp. 101-117, e II, pp. 224-234, 1934.

\_\_\_\_\_. *Reflections of Physicist*. Nova Iorque, Philosophical Library, 1955.

BROUWER, L. E. J. "Consciousness, Philosophy and Mathematics". In P. Benacerraf and H. Putnam (eds.) *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, Cambridge, Cambridge University Press, 1983.

CHIHARA, C. *Ontology and the Vicious-Circle Principle*. London, Cornell University, 1973.

DUMMETT, M. "The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic". In P. Benacerraf and H. Putnam (eds.) *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, Cambridge, Cambridge University Press, 1983.

\_\_\_\_\_. *Truth and other Enigmas*. London, Gerald Ducnwoth & Company, 1978.

QUINE, W. V. *The Way of Paradox*, Cambridge, Harvard University Press, 1966.

\_\_\_\_\_. "Paradox". In *Scientific American*, 1962, pp. 84-96.

SMULLYAN, R. *O Enigma de Sherazade*. Rio de Janeiro, Zahar editores, 1998.